CONTEXTOS DE EDUCACION
© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC.
Este artículo pertenece a la Revista Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 97-110
y fue descargado desde: www.hum.unrc.edu.ar/ojs/index.php/contextos

EL ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO: UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA[1]

THE ONTOSEMIÓTICO ANALYSIS: A DIDACTIC TOOL FOR THE TRAINING OF THE MATHEMATICS TEACHER

Silvia Etchegaray*, María Elena Markiewicz*, Belén Giacomone**

*Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina)
**Universidad de Granada (España)
setchegaray@exa.unrc.edu.ar, mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar, belén.giacomone@gmail.com

Palabras Clave

didáctica de la matemática
análisis ontosemiótico
objetos
procesos
conflictos semióticos

Resumen

Es de suma importancia para el futuro profesor de matemáticas contar con herramientas que le permitan describir, explicar y mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En este sentido, el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) brinda algunas herramientas que son de suma utilidad para efectuar este tipo de análisis didáctico, permitiendo realizar una mirada microscópica de la actividad matemática que se genera a partir de un problema o tarea, explicitando los objetos matemáticos y los procesos que se ponen a funcionar en su realización y anticipando posibles conflictos semióticos. El objetivo de este artículo es doble: por un lado, mostrar un análisis ontosemiótico de una tarea matemática que podemos considerar como típica en las asignaturas básicas de álgebra que cursan los futuros profesores de matemática en la universidad y, por otro lado, mostrar cómo la misma tarea se podría retomar para su análisis didáctico-matemático y reformular en las asignaturas de Didáctica de la Matemática del profesorado. En este caso no sólo para promover la apropiación, por parte de los estudiantes, de las herramientas de análisis del EOS, sino también para mostrar la potencialidad de las mismas en el momento de decidir posibles intervenciones docentes que ayuden a superar potenciales conflictos semióticos que se puedan producir al momento de su implementación.

Cita sugerida: Etchegaray, S., Markiewicz, M.E., Giacomone, B. (2019). El análisis ontosemiótico: una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemática. *Contextos de Educación* 26 (19): 97-110

Key words

didactics of mathematics

onto-semiotic analysis

objects

processes

semiotic conflicts

Abstract

It is fundamental for the future mathematics teacher to have tools that allow them to describe, explain, and improve the teaching and learning processes. In this sense, the Onto-Semiotic Approach to mathematical knowledge and Instruction (EOS) offers some tools that are extremely useful to carry out this type of didactic analysis, allowing a microscopic view of the mathematical activity that is generated when solving a problem or task, to explain the mathematical objects and the processes that are put at stake in their realization and anticipate possible semiotic conflicts that may arise. The objective of this article is twofold: on the one hand to show an ontosemiotic analysis of a mathematical task that we can consider as 'typical' in the basic subjects of algebra that future mathematics teachers attend in the university and, on the other hand, to show how the same task could be retaken for its didactic-mathematical analysis and reformulated in the subjects of Didactics of Mathematics' Teachers. In this case, not only to promote the appropriation, by the students, of the EOS analysis tools, but also to show their potential when deciding on possible teaching interventions that may help to overcome potential semiotic conflicts that can emege at the time of its implementation.

1. Introducción

Para poder realizar con idoneidad didáctica su labor profesional, el profesor de matemática debería poder efectuar un análisis pormenorizado de las situaciones o tareas que propone a sus alumnos y de la actividad matemática que se genera a partir de las mismas. Pero para ello es necesario que disponga de herramientas que le permitan realizar este tipo de análisis. En este sentido, el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), sistema teórico que se viene desarrollando en el seno de la Didáctica de la Matemática, trata de aportar herramientas teóricas que permitan analizar la actividad matemática, a través del reconocimiento y la explicitación de los objetos matemáticos que se deben tener disponibles o que emergen de las prácticas que se desarrollan para llevar a cabo una tarea, los procesos que se deben desplegar y los potenciales conflictos semióticos que podrían surgir durante su resolución. Este reconocimiento de objetos, procesos y conflictos semióticos forma parte de lo que el EOS denomina *análisis ontosemiótico* y es considerado, en el marco de este enfoque, como una competencia específica del profesor de matemática (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar la potencialidad de este tipo de análiis para dilucidar la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática, en una tarea *típica'* que se plantea habitualmente en los cursos iniciales de Algebra o Matemática Discreta a nivel universitario. Por otra parte, pretendemos mostrar cómo podríamos retomar y poner en valor esta tarea en el ámbito de asignaturas de didáctica de la matemática para que sean los mismos estudiantes los que, a partir de la *reflexión guiada* sobre sus propias prácticas, comiencen a reconocer y explicitar algunas de las herramientas del EOS que les permitirán realizar un análisis ontosemiótico, comprender cuál es su potencialidad y proponer intervenciones para su posterior implementación de tal modo que se ayude, con fundamento didáctico, a superar algunos de los conflictos previstos.

En el punto 2 de este artículo comenzaremos por exponer algunos de los constructos teóricos centrales que plantea el EOS y que serán puestos en funcionamiento en este trabajo. En el punto 3 mostraremos el análisis ontosemiótico que hemos realizado de la tarea seleccionada y de una resolución esperada utilizando las herramientas del EOS, mientras que en el apartado 4 trataremos de plantear una manera en que esta tarea es retomada y reformulada en la asignatura Didáctica de la Matemática II del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina), en tanto tarea movilizadora para la apropiación de estas herramientas conceptuales y metodológicas por parte de los estudiantes del profesorado. Por último, en el apartado 5, esbozaremos algunas reflexiones finales en relación a las competencias a desarrollar en la formación del profesor.

2. El Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos

En este apartado, tal lo anticipado, presentaremos una síntesis de las nociones teóricas fundamentales que constituyen el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS). Las publicaciones donde se viene desarrollando y aplicando este sistema teórico están disponible en el sitio web http://enfoqueontosemiotico.ugr.es. Este sistema teórico para la Didáctica de la Matemática intenta articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Posee como punto de partida "la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado" (Godino et al., 2007, p. 3).

Dado su origen pragmático, en el marco de este enfoque, se introduce la noción de *práctica matemática* que refiere a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Estas prácticas pueden ser idiosincráticas de una persona o compartidas en el ámbito de una institución.

El *significado* de un objeto matemático está ligado, según el EOS, a los *sistemas de prácticas* que realiza una persona (significado personal) o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los que se requiere poner en funcionamiento, en *uso* dicho objeto. En este sentido, los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas y estos últimos están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen, a su vez, los seis diferentes tipos de *objetos o entidades primarias* que se explicitan a continuación:

- *Situaciones-problemas* (tareas, ejercicios...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo…)
- *Conceptos-definiciones*
- *Propiedades* (proposiciones o enunciados sobre conceptos)
- *Argumentos* (usados para validar o explicar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo)
- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos)

Los problemas son el origen o *razón de ser* de la actividad y motivan la puesta en funcionamiento de ciertos procedimientos, definiciones y propiedades, como así también de argumentos para justificar los procedimientos y propiedades utilizadas. El lenguaje representa a las demás entidades y es instrumento para la acción, por lo que se transforma en elemento esencial en la transformación de los significados tanto institucionales como personales.

Por otra parte, tanto los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas como los emergentes de las mismas pueden ser considerados, de acuerdo al EOS, según distintas facetas duales, según el juego de lenguaje en el que participan: personal-institucional, ostensivo-no ostensivo, expresión-contenido, extensivo-intensivo, unitario-sistémico; y estas dualidades dan lugar a diferentes procesos cognitivos duales que se consideran fundamentales en la actividad matemática:

- *Proceso de materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto ideal, no ostensivo. A su vez un objeto no ostensivo puede ser materializado mediante un ostensivo.

- *Proceso de particularización-generalización* (sostenido por la dualidad ejemplar-tipo): el análisis de un objeto particular o *ejemplar* permite establecer conclusiones sobre un conjunto de objetos y dualmente el análisis de un conjunto de objetos permite pensar cómo funciona un caso particular.

- *Proceso de descomposición-reificación* (referido a la dualidad sistémico-unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los objetos (unitarios) intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero tras el proceso de estudio los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas.

- *Proceso de representación-significación* (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir significado a una expresión. Los procesos de representación y significación son *densos* en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de problemas.

- *Proceso de personalización-institucionalización* (dualidad personal-institucional): en una primera fase de estudio es necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en su resolución (personalización). A su vez, mediante una adecuada gestión docente, se debe promover la institucionalización de los mismos.

Estos procesos pueden, a su vez, ser fuente de *conflictos semióticos*, es decir, de disparidades o desajustes entre significados atribuidos por dos sujetos, ya sean estos personas o instituciones (Godino, 2002), los cuales permiten anticipar/explicar las dificultades que podrían surgir (o las que efectivamente surgen) en el transcurso de los procesos de instrucción. Por ello consideramos que estos constructos teóricos y metodológicos se deben tornar funcionales en el proceso de formación de un profesor.

3. Análisis de una tarea basado en el EOS

En este tercer apartado la intención es mostrar cómo estas herramientas que nos provee el EOS nos permiten realizar un primer análisis, en dos niveles diferentes, a una tarea que podemos calificar de *típica* en materias de primer año del profesorado en matemática, rotuladas clásicamente como simples tareas que sólo exigen aplicar el principio de inducción matemática. Se trata, en efecto, de una tarea que solicita la demostración de una propiedad referida a la sumatoria de números de un cierto tipo, utilizando dicho principio.

A continuación, presentaremos una formulación *habitual* de la tarea seleccionada, tal como se propone en las asignaturas iniciales de Álgebra o Matemática Discreta y como también se suelen presentar en libros de texto, acompañada del análisis de dicha tarea en términos de *objetos* y *procesos* que se ponen en juego en una posible resolución esperada de la misma, teniendo en cuenta el contexto de enseñanza en el que es planteada.

Tarea: a) Demuestre, utilizando el Principio de Inducción Matemática que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

b) Calcule: $\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{i(i+1)}$

Vale destacar que esta tarea fue elegida para su análisis debido a las dificultades que sostenidamente se observan en la práctica docente universitaria, no sólo asociadas con la demostración en sí, sino también, y fundamentalmente, con la interpretación o el significado personal otorgado a la propiedad que los alumnos tienen que demostrar, lo cual queda plasmado, por ejemplo, cuando se les cuestiona a los estudiantes acerca de: ¿de qué se habla en esta *propiedad?* o cuando la tienen que *poner a funcionar* para un *'n'* particular, tal como se solicita en el inciso b)

A continuación, presentaremos el análisis ontosemiótico realizado distinguiendo dos niveles:

3.1 Primer nivel de análisis (en términos de *objetos* puestos a funcionar):

- *Tarea*: Se trata de una tarea en la que se pide al alumno demostrar una propiedad ya establecida (relacionada a una fórmula que permite calcular la suma de los *n* primeros números de determinada forma), utilizando el Principio de Inducción Matemática y luego utilizar dicha propiedad para el cálculo efectivo de los 7 primeros números de dicha forma.

- *Procedimientos*: Los procedimientos o acciones que el alumno deberá realizar para resolver esta tarea están ligados a la sucesión de pasos necesarios para realizar la demostración utilizando el Principio de Inducción:

-Identificación de la propiedad P que hay que demostrar, lo cual puede incluir la interpretación $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ como la suma extendida: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)}$

- Planteo del caso base P(1): $\frac{1}{1.(1+1)} = \frac{1}{1+1}$ y prueba del mismo.

- Planteo y prueba de la etapa inductiva, lo cual incluye:

  - Considerar un *n* particular arbitrario.

  -Suponer que la propiedad vale para dicho *n*, es decir:

  P(n): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (planteo de la hipótesis inductiva).

  - Probar que la propiedad vale para el natural siguiente *n+1*, es decir

  P(n+1): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n+1).((n+1)+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

En la demostración de P(n+1),

- partir de: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$

- poner de manifiesto el término anterior al último término de la suma, esto es:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$$

- asociar los primeros *n términos* de la suma:

$$(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)})+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$$

- reemplazar la expresión $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}$ por $\frac{n}{n+1}$ usando la hipótesis inductiva, con lo cual se obtiene: $\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1).(n+2))}$

- realizar la suma de expresiones fraccionarias, obteniendo: $\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$

- aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en el numerador, con lo cual se llega a: $\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$

- transformar el trinomio cuadrado perfecto en el numerador: $\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$

- realizar el cociente, para obtener la expresión deseada: $\frac{n+1}{n+2}$

Para dar respuesta al ítem b) el procedimiento esperado es el siguiente:

-reemplazar, en la igualdad demostrada, *n* por 7 y realizar el cálculo: $\frac{7}{7+1}$

• *Propiedades:* Entre las propiedades que se ponen en juego en esta resolución podemos mencionar:

-La propiedad dada, es decir: $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}$

-Propiedades asociativa de la suma, distributiva del producto respecto de la suma, propiedad del trinomio cuadrado perfecto.

-El número de la forma $\frac{i}{i+1}$ anterior a $\frac{1}{(n+1).((n+2)}$ es $\frac{1}{n(n+1)}$.

- *Definiciones:*

-Suma, producto, cociente y potencia de números naturales.

-Suma de fracciones y de expresiones fraccionarias.

-Definición de sumatoria (como suma desplegada)

- *Argumentaciones*:

- Demostración deductiva (emergente) utilizando el Principio de Inducción Matemática, según el cual si se prueba el caso base (P(1)) y la etapa inductiva ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$) entonces se debe concluir que $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$.

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 97-110

- Reglas de inferencia de la lógica deductiva, como el Teorema de la Deducción según el cual para demostrar una implicación basta suponer el antecedente y deducir el consecuente y la introducción del generalizador, que asegura que, si una propiedad se cumple para un individuo *n* particular arbitrario de un conjunto, entonces la propiedad se cumple para todos los individuos de dicho conjunto.

- *Lenguaje*: fundamentalmente algebraico, que se ve reflejado, por ejemplo, en expresiones como : $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1).((n+1)+1)}$, sobre el cual se puede pensar y transformar.

Aunque ésta sería la resolución más esperada, otra alternativa es que se trabaje directamente con la sumatoria: sin expresarla como suma extendida, lo cual conlleva un juego de objetos diferentes al anterior *sistema de prácticas* y que resulta de suma importancia desvelar si se pretende *poner en diálogo* las diversas producciones que normalmente circulan en un aula. En este sentido, el *sistema de prácticas* desplegado ante esta tarea está regulado -en primera instancia- por la interpretación que se le otorga a la sumatoria que se presenta, más allá que luego se aplica el principio de inducción matemática, en tanto técnica de demostración deductiva.

3.2 Segundo nivel de análisis (en términos de *procesos* y potenciales *conflictos semióticos*):

En la resolución esperada de esta tarea están involucrados los siguientes procesos:

- *Materialización-idealización* (dualidad ostensivo-no ostensivo)*:*

  - La expresión $\frac{1}{i(i+1)}$ representa un número racional cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es el producto de un natural por su consecutivo.

  - El ostensivo $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ se utiliza para representar la suma de todos los números racionales de la forma $\frac{1}{i(i+1)}$ con *i* variando desde 1 hasta *n*.

  - *n* está representando la cantidad de números de esa forma que se suman.

- *Particularización-generalización* (dualidad extensivo-intensivo)

  - El planteo del caso base P (1) requiere que el alumno considere un caso particular de la fórmula general, lo cual implica comprender que, en dicho caso, la sumatoria se reduce a un único término.

  - Para probar la etapa inductiva: ($\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$) el alumno tiene que realizar un proceso de particularización, pero de otra naturaleza respecto al anterior, ya que para probar esta generalización debe considerar un *n* particular pero a su vez arbitrario. Una vez probada la implicación para tal *n*, debe realizar una generalización para afirmar que la misma vale para un *n* cualquiera. En otras palabras, hay una transformación en el significado del *n*.

  - A partir de la prueba del caso base y de la etapa inductiva (que involucra una generalización) se debe realizar una nueva generalización para concluir que la propiedad vale para todos los números naturales. En otras palabras, se hace necesario poner a funcionar una operación cognitiva sobre otra.

  - Para calcular la sumatoria de los 7 primeros números de la forma dada, se debe realizar una nueva particularización, tomando a *n* como 7.

- *Descomposición-reificación* (dualidad sistémico-unitario)

- Si bien la resolución de la tarea (la demostración en este caso) se debe descomponer en problemas más elementales, como el planteo y la demostración del caso base y de la etapa inductiva y que, para ello, los objetos unitarios intervinientes deben ser tratados en el sistema deductivo, al finalizar la resolución de la tarea se pretendería que la propiedad demostrada y la demostración emergente se vean como un objeto unitario a fin de poder ser re-utilizada en otra situación. En otras palabras, se necesita reificar la actividad matemática realizada.

- *Representación-significación* (dualidad expresión-contenido)

Este proceso dual es denso en toda la actividad matemática realizada, pero en este trabajo destacaremos la siguiente situación de producción matemática que actúa como reguladora de todo el *sistema de práctica* que se espera que se desarrolle.

- Para poder llevar a cabo la demostración de la propiedad es necesario atribuir contenido a la representación $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ y a la igualdad $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}$, en el sentido de que la suma de los primeros *n términos* de la forma $\frac{1}{i(i+1)}$ se puede calcular mediante la expresión $\frac{n}{n+1}$, que guarda relación con el *n* (es decir, con el número de términos que estamos sumando).

Estos procesos (inconclusos o incompletos), como ya hemos mencionado, pueden ser origen de *conflictos semióticos*, los cuales se manifiestan en términos de dificultades para resolver la tarea, como, por ejemplo:

- Que no se logre reconocer que la expresión $\frac{1}{i(i+1)}$ está representando a un número racional de determinada forma (que varía), ni que la expresión $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}$ está materializando la suma de los primeros *n* números que tienen esa forma. Esto exige otorgar contenido y sentido al símbolo de sumatoria como suma de *n términos* de una forma dada (que cumplen una propiedad).

- Que no se logre atribuir valor semántico a la igualdad $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}$ y, en particular a la representación $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ lo que puede impedir el planteo correcto tanto del caso base, como de la etapa inductiva, en particular de la hipótesis inductiva.

- Que no se reconozca el carácter general de la afirmación $\forall n\in\mathbb{N}: P(n)\Rightarrow P(n+1)$, lo que exige considerar un *n* particular arbitrario y demostrar que para ese *n* vale la implicación.

- Que no se logre atribuir el valor semántico al tipo de argumentación deductiva que propone el principio de inducción matemática, en el sentido de que si se muestra que se cumplen las dos hipótesis del mismo (caso base y etapa inductiva) es suficiente para demostrar que vale la conclusión ($\forall n\in\mathbb{N}: P(n)$) y, por tanto, la propiedad propuesta.

- Que no se pueda utilizar la propiedad -en tanto objeto unitario- en una nueva situación ya que no se logró reificar la propiedad ya demostrada lo que puede impedir el posterior cálculo de la suma de los primeros 7 números.

4. Retomando la tarea en una asignatura de Didáctica para promover la apropiación de herramientas del EOS

La asignatura Didáctica de la Matemática II, correspondiente al Profesorado en Matemática de la UNRC tiene, entre sus contenidos mínimos, al estudio del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Pretendemos entonces que los alumnos se apropien de los constructos fundamentales de esta teoría, en otras palabras, que tornen funcionales las herramientas de análisis ontosemiótico para mejorar su práctica profesional futura. Ahora bien, nosotros planteamos que la manera de lograr esa apropiación por parte de los alumnos no es *mostrando o exponiendo* esas herramientas en la teoría de esa asignatura, sino tratando de que sean ellos mismos los que las reconozcan a partir de la reflexión (*guiada*) sobre su propia práctica matemática y docente. Sostenemos, parafraseando a Ponte y Chapman (2008), que debemos enseñar a los profesores en formación de la misma manera que se espera que ellos enseñen (matemática) como profesores.

En este sentido, consideramos que es posible sugerir en la asignatura tareas que apunten a generar ideas sobre que el significado de un objeto matemático no se restringe ni se agota en su definición (o definiciones equivalentes) ni en la aplicación de una técnica, sino que emerge a partir de los problemas que resuelve y de los usos que se hacen de ese objeto. La identificación y discriminación de objetos disponibles y emergentes y procesos que se ponen a funcionar en los *sistemas de prácticas* que se despliegan ante distintos tipos de situaciones problemáticas, permite a los estudiantes tomar conciencia de la relatividad contextual, personal e institucional del significado de dicho objeto. Es en este contexto teórico y metodológico en el que proponemos retomar, en las clases de Didáctica, la tarea analizada en el punto 3, solicitando no sólo su resolución matemática sino planteando una serie de nuevas cuestiones didáctico-matemáticas que movilicen la reflexión sobre su complejidad ontosemiótica.

La nueva tarea planteada en Didáctica de la Matemática es la siguiente:

-Resuelve la tarea 1.

-Describe la secuencia de prácticas que has realizado para resolver la situación dada.

- ¿Qué objetos matemáticos puedes reconocer en el enunciado de la tarea y en tu resolución?

-Distingue entre aquellos objetos matemáticos que deberías tener disponibles para resolver la situación y aquellos que emergen como producto de tu actividad matemática sobre la situación planteada.

La descripción, ahora explícita por parte de los estudiantes del profesorado en Matemática de la secuencia de sus propias prácticas, les ayuda a tomar conciencia y a identificar relaciones y/o diferencias que de otro modo se mantendrían naturalizadas entre algunos de los *objetos* matemáticos que aparecen en el enunciado de la tarea y en su resolución. Por ejemplo, los números naturales y su relación con la sumatoria y con las fracciones que se están sumando como asimismo la propiedad que se tiene que demostrar con su técnica de demostración: el principio de inducción matemática.

Además, el pedido de distinguir entre aquellos objetos matemáticos disponibles y aquellos que son producto de su actividad ante la tarea, tiene como objetivo la desnaturalización por parte de los estudiantes, de lo que significa la complejidad de un proceso de producción matemática y su diferencia con la simple aplicación de una técnica. En esta situación podríamos mencionar la serie y concatenación de propiedades de las operaciones y de los números que tienen que tener disponibles y que por su uso mecanizado se naturalizan, como, por ejemplo, las propiedades asociativas de la suma en Q, distributiva del producto respecto de la suma en IN, propiedad del trinomio cuadrado perfecto y su relación con el cuadrado del binomio, la *demostración* en tanto objeto emergente de la tarea y no sólo como *técnica* que tienen que aplicar.

A partir de la discusión en clase en torno a las características de estos objetos particulares que los estudiantes han identificado en sus propias prácticas matemáticas promovemos la institucionalización de la tipología de los seis objetos primarios que propone el EOS correspondientes al primer nivel de análisis ontosemiótico.

A fin de profundizar el nivel de análisis anterior planteamos, a continuación, las siguientes nuevas dos cuestiones:

- ¿Puedes reconocer algún ‘proceso’ que hayas llevado a cabo para resolver la situación propuesta? Si es así intenta describirlo.
- ¿Puedes detectar alguna dificultad en el transcurso de tu resolución? Si es así, ¿a qué atribuirías la misma?

Estas nuevas preguntas apuntan a que los estudiantes revisen la secuencia de prácticas que cada uno ha realizado para resolver la tarea y a discutir la idea que poseen de *proceso*.

En general los alumnos pueden identificar sin mayores dificultades el proceso de generalización-particularización, que es también, por otra parte, el más reconocido por las instituciones matemáticas en general. Sin embargo, lo que pretendemos es que, en la discusión sobre las secuencias de prácticas realizadas, se ponga de manifiesto que también fue necesario hacer uso de ciertos ostensivos para representar objetos no ostensivos ideales (proceso de materialización-idealización), que fue necesario otorgar significado personal a ciertas representaciones realizadas (proceso de representación-idealización), que fue necesario *unificar* ciertos objetos analizados primero como parte de un sistema (proceso de sistematización-reificación). Pretendemos, de esta manera, realizar un reconocimiento colectivo de los *procesos duales* fundamentales considerados por el EOS y ampliar así, por ende, el primer significado personal de los estudiantes sobre los procesos que se involucran en una actividad matemática.

La pregunta acerca de las dificultades detectadas en la resolución de la tarea apunta a que los estudiantes expongan no sólo sus dificultades (si es que las hubo), sino también a reflexionar sobre las causas de las mismas y poder así generar nuevas explicaciones sobre el por qué se producen.

Como es posible que la respuesta a esta cuestión en una primera instancia sea negativa, ya que es una práctica matemática elemental para estudiantes del profesorado, o que no logren poner al descubierto las relaciones que sustentan cada decisión y/o acción dada la *ilusión de transparencia* que los estudiantes poseen sobre su propia práctica, les proponemos a continuación la siguiente tarea de análisis sobre una práctica matemática de *otro*:

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 97-110

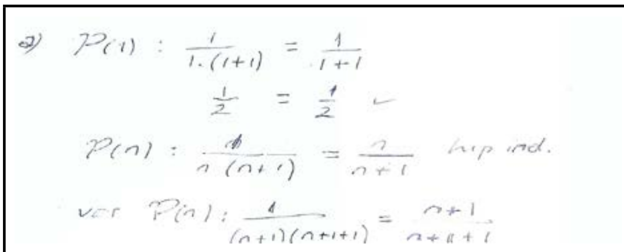
Analiza las siguientes resoluciones de la tarea 1 realizadas por dos alumnos de la asignatura Introducción al Algebra (1er. Año de la carrera de Analista en Computación).

-Identifica las dificultades que se pueden apreciar en las resoluciones

- ¿Cómo podrías explicar estas dificultades?

-¿Podrías pensar en alguna intervención que permita superar los conflictos detectados?

Dos de las resoluciones que presentamos son las siguientes:



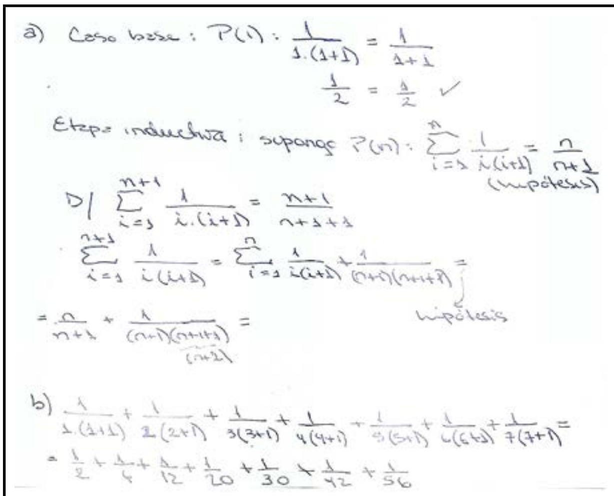
a) $P(1): \frac{1}{1.(1+1)} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

$P(n): \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ hip ind.

ver $P(n): \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n+1}{n+1+1}$

Figura 1. Resolución 1



a) Caso base: $P(1): \frac{1}{1.(1+1)} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

Etapa inductiva: supongo $P(n): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ (hipótesis)

D/ $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i.(i+1)} = \frac{n+1}{n+1+1}$

$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}}_{\text{hipótesis}} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} =$

$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\underbrace{(n+1+1)}_{(n+2)}} =$

b) $\frac{1}{1.(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \frac{1}{4(4+1)} + \frac{1}{5(5+1)} + \frac{1}{6(6+1)} + \frac{1}{7(7+1)} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$

Figura 2. Resolución 2

En estos *intentos* de resolución realizados por *otros*, los estudiantes del profesorado pueden observar que, en el caso de la resolución 1 (figura 1), hay una dificultad en el planteo, tanto de la hipótesis inductiva como en el consecuente de la etapa inductiva, donde se reduce la suma de los *n términos* al último término. Dicha dificultad es posible explicarla, con las herramientas de análisis didáctico que ya disponen, desde la imposibilidad del alumno de otorgar significado al símbolo de sumatoria, es decir, como un conflicto semiótico ligado al proceso de representación-significación.

En el caso del inciso a) de la resolución 2 (figura 2) se puede observar que, si bien está correctamente planteada tanto la hipótesis inductiva como lo que se debe demostrar y hay un buen uso de la hipótesis inductiva, el alumno que la realiza no tiene disponible el procedimiento de suma de fracciones algebraicas y que, incluso, estas expresiones pueden no evocar a la suma de dos fracciones, es decir, su dificultad se podría explicar en términos de un conflicto semiótico ligado al proceso de materialización-idealización.

En el inciso b) se puede observar que el alumno no utiliza la propiedad ya planteada como verdadera en el enunciado (y que intentó demostrar) para el cálculo de los siete primeros números de esa forma, lo que sugiere la presencia de un conflicto que se puede relacionar al proceso de representación-significación conjuntamente con el de descomposición-reificación; dado que el alumno no ha podido reificar la propiedad (que demostró probando el caso base y la etapa inductiva) como una igualdad que le permite calcular la suma de los primeros *n números* de esa forma y así dar respuesta al problema planteado en b).

Con la siguiente pregunta: ¿Podrías pensar en alguna intervención que permita superar los conflictos detectados?, planteamos la necesidad de problematizar y pensar tareas que por un lado ayuden a otorgar significado al símbolo de sumatoria de términos de una forma dada y que apunten al reconocimiento de sumas de expresiones algebraicas y de procedimientos que permitan su cálculo. Por otra parte dichas reformulaciones de la tarea 1 deberían ayudar a que se otorgue valor semántico a la propiedad que se pretende estudiar, por ejemplo promoviendo en su nuevo enunciado la construcción de la misma. En otras palabras, pretendemos que se generen intervenciones docentes que apunten a superar los conflictos semióticos antes detectados. Un ejemplo de tales intervenciones solicitadas es la siguiente reformulación de la tarea:

-Considera los números de la forma $\frac{1}{i.(i+1)}$ donde *i* puede ser cualquier número natural (no cero). Haz un listado de los primeros números que tienen esta forma.

-¿Cómo expresarías la suma de los primeros *n números* de esa lista?
-Propón una expresión general que relacione la suma de los *n* primeros números de la forma $\frac{1}{i(i+1)}$ con su resultado.
-¿Cómo validarías la propiedad propuesta?
-Calcula, utilizando el resultado obtenido, la suma de los primeros 20 números de la lista.

Realizando un análisis ontosemiótico a esta nueva tarea, es posible observar que se *obliga* a poner en funcionamiento otros procedimientos, otro tipo de argumentación no deductiva (inducción empírica a partir de la observación de casos particulares, la búsqueda de regularidades y la consiguiente generalización), hacer uso de otro tipo de lenguaje y transformarlo, ya que se comienza con un lenguaje aritmético para luego *pasar* al lenguaje algebraico. Asimismo *obliga* a poner en juego y explicitar otros procesos de materialización-idealización (al buscar necesariamente una manera de expresar la suma de los números de esa forma), de particularización-generalización (al pasar de la observación de las regularidades en las sumas para cada *n* particular a la suma para un *n* en general), de representación-significación (la construcción personal de la propiedad otorga valor semántico personal a la igualdad conjeturada *para todo n natural*) y de descomposición-reificación (al tener que unificar todo lo visto en una propiedad emergente que permite ser utilizada para resolver una situación particular (la suma de los primeros 20 números de la lista).

5. Reflexiones finales

En este trabajo hemos intentado, por un lado, mostrar la potencialidad de algunos constructos teóricos del EOS para el análisis de tareas matemáticas. En este caso hemos realizado un análisis ontosemiótico de una posible resolución de una tarea que se presenta habitualmente en clases de Matemática Discreta o Álgebra a nivel de primer año de la universidad. Este tipo de análisis permite explicitar todos los objetos, relaciones y procesos duales que se ponen en funcionamiento en la actividad matemática, es decir, permite entrever la complejidad ontosemiótica de dicha actividad y anticipar conflictos semióticos potenciales que pueden surgir de la misma.

Pero también, con este artículo, quisimos proponer una manera de *acercar* a nuestros estudiantes del profesorado a estas herramientas; tratando de realizar un reconocimiento colectivo de las mismas a partir de la reflexión sobre sus propias resoluciones de la tarea, es decir, sobre sus propias prácticas matemáticas (y sobre prácticas de otros).

De esta manera se pretende generar oportunidades para que los futuros profesores desarrollen, tal como se anticipara en la introducción de este trabajo, una competencia profesional específica, la competencia de análisis ontosemiótico, descripta en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017). Estos autores presentan un modelo de conocimientos y competencias didácticas matemáticas (modelo CCDM), en el cual plantean 5 competencias que el profesor debería desarrollar. Entre ellas, se encuentra *la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas implicadas en las tareas*; esto es *la competencia de identificar la variedad de objetos y significados involucrados en la resolución de una tarea escolar*. Esta competencia le permitirá al profesor "comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos" (p. 99). Claro que para lograr esto, es necesario desarrollar e implementar intervenciones formativas específicas como, por ejemplo, las que presentamos en este trabajo.

Continuando con este modelo, estamos convencidos de que acciones formativas que apuntan a la apropiación de estas herramientas permiten que nuestros estudiantes de profesorado expliciten sus ideas previas sobre la actividad matemática, sus concepciones sobre la naturaleza de la matemática y de su propia práctica (Etchegaray, Buffarini, Olivares y Sosa, 2017; Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2018; Nogueira, 2015). Asimismo, son de suma importancia para la formación profesional del futuro profesor de matemática, dado que le permite tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica de las tareas que propone, proveer otras explicaciones de las dificultades de los alumnos en términos de conflictos semióticos y proponer así intervenciones fundamentadas que le permitan mejorar su labor educativa. En otros términos, planteamos la producción de conocimientos didácticos para controlar y producir acciones sobre la enseñanza.

Notas

1. Trabajo realizado en el marco del Proyecto: *El análisis de prácticas, objetos y procesos como condicionantes de diferentes estudios didáctico-matemáticos en la educación superior, inicial y continua*, de la Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.

Referencias

Etchegaray, S., Buffarini, F., Olivares, M. y Sosa, M. (2017). Análisis y reflexión sobre la complejidadonto-semiótica de dos sistemas de prácticas planificados en el contexto de la práctica final del profesorado.En J. M. et al. (Eds.),*Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (1-12).Universidad de Granada: CIVEOS.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación* (en prensa).

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education.*ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas*. Bolema, 31*(57), 90-113.

Nogueira, I. C. (2015). Análise ontossemiótia de procesos instruccionales de matemática, melhoria de práticas e desenvolvimento profissional docente.*Revista de Estudios e investigación en Psicología y Educación, Extra*(6), 209-2143.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225–263). New York: Routledge.