Contextos de Educación, agosto de 2018, nº 24, ISSN 2314-3932
Universidad Nacional de Río Cuarto.
Facultad de Ciencias Humanas
Departamento de Ciencias de la Educación

LA COMPRENSIÓN DE TEXTOS: UN ANÁLISIS DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

THE COMPREHENSION OF TEXTS: AN ANALYSIS FROM THE DIDACTICS OF MATHEMATICS

María Elena Markiewicz*, Silvia Catalina Etchegaray*

*Universidad Nacional de Río Cuarto
República Argentina
mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Palabras Clave

didáctica de la matemática

análisis de textos

objetos

procesos

conflictos semióticos

Resumen

Las dificultades que, como docentes, observamos en nuestros estudiantes cuando se enfrentan a la lectura y comprensión de un texto matemático, y nuestras investigaciones en el área de la Didáctica de la Matemática, nos llevan a cuestionar las explicaciones de estas dificultades en términos de falta de predisposición, de estudio y/o de conocimiento por parte de los estudiantes. La intención de este artículo es mostrar que hay otras explicaciones para estas dificultades, que tienen que ver con ciertas características de los textos académicos universitarios, que están determinados por un tipo de prácticas discursivas propias de la comunidad matemática, pero, además, por la variedad de objetos, relaciones y procesos que están involucrados en la actividad matemática misma y que, por ende, es necesario poner en funcionamiento para su comprensión. En este sentido, queremos mostrar la potencialidad de algunos constructos teóricos que nos brinda el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, - marco teórico dentro de la Didáctica de la Matemática-, para el análisis del fragmento de un libro de texto, poniendo de manifiesto la complejidad ontosemiótica de estas formas especializadas de utilización del lenguaje (cuyo dominio es en gran medida la base del dominio de la ciencia) y permitiendo detectar potenciales conflictos semióticos, lo que proporciona otras explicaciones a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Keywords

didactics of mathematics

text analysis

objects

processes

semiotic conflicts

Abstract

The difficulties that we, as teachers, observe in our students when they are confronted with the reading and comprehension of a mathematics text, and our investigations in the area of the Didactics of Mathematics, lead us to question the explanations of these difficulties in terms of lack of predisposition, study and/or knowledge on the part of the students. The purpose of this article is to show that there are other explanations for these difficulties which have to do with certain characteristics of the academic texts, which are determined not only by discursive practices that are typical of the community, but also by the variety of objects, relationships and processes that are involved in the mathematical activity itself and that, therefore, must be put into operation for their understanding. In this sense, we want to show the potentials of some theoretical constructs that the Ontosemiotic Approach- a theoretical framework of the Didactics of Mathematics to Mathematical Knowledge and Instruction- provide us. This approach was applied to the analysis of a fragment of a textbook. The analysis revealed the ontosemiotic complexity of specialized forms of using the language (whose domain is to a great extent the basis of the domain of science). Consequently, it was possible to detect potential semiotic conflicts, which provide other explanations for students' learning difficulties.

Introducción

Entre lo que se espera que logren nuestros estudiantes y lo que realmente ocurre en las aulas de los primeros años del nivel superior hay una gran distancia, que algunos autores reconocen como "una brecha inevitable" (Carlino, 2005, p. 9). En este sentido, nos preguntamos: ¿qué podemos hacer para abordar esta cuestión desde un punto de vista que supere los planteos que centran sus explicaciones en la falta de predisposición del estudiante para aprender o en la ausencia de conocimiento por parte del mismo?

En un primer momento necesitamos explicitar nuestro supuesto sobre el significado de enseñar ciencia en el nivel superior. Para ello recuperamos el posicionamiento de Lemke (1997) quien sostiene que la enseñanza de la ciencia es un proceso social de introducir a los alumnos dentro de una comunidad de personas que comparten creencias, valores, modelos semánticos y formas de construir significados.

Ahora bien, los científicos, en particular los matemáticos, en tanto comunidad de personas en el sentido en que lo expresa Lemke, construyen un lenguaje específico, que va objetivando la teoría de la ciencia matemática cuyo dominio depende, en gran medida, del dominio semántico y sintáctico de estas formas especializadas de utilización del lenguaje.

Ante la magnitud de las dificultades observadas que contornean este problema, sabemos que se han intentado diversas alternativas, las cuales, tal como lo señala Vázquez (2007), constituyen esfuerzos valiosos que tienden a afianzar las habilidades lingüístico-comunicativas generales de los estudiantes. Sin embargo, y en consonancia con la misma autora, abordar esta problemática obliga a considerar la complejidad implicada en la lectura e interpretación de textos académicos y en la elaboración de escritos empleando el lenguaje propio de una ciencia particular. En ese mismo escrito, Vázquez describe las diferencias de lectura y escritura entre el nivel secundario y el universitario y expresa que las características de los materiales de lectura en la universidad pueden obstaculizar los procesos de comprensión, dado que "…el joven que ingresa a la universidad se enfrenta con un tipo de discurso muy estructurado, propio de cada área disciplinaria, cada una con su lógica particular de producción y comunicación, con características discursivas específicas de la comunidad científica…" (Vázquez, 2007, p. 22). Específicamente en el caso de la matemática, dada la naturaleza abstracta de sus objetos y su carácter relacional, la lectura de un texto exige, para su comprensión, poner en funcionamiento una gran variedad de objetos, relaciones y procesos propios de esta ciencia que es necesario desnaturalizar.

En este sentido, en el seno de la Didáctica de la Matemática se ha desarrollado, en los últimos años, un enfoque teórico denominado Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), cuyo fundador ha sido el Dr. Juan Díaz Godino de la Universidad de Granada (España), que avanza sobre la elaboración de una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus producciones. (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012).

El EOS surge en el marco del Programa Epistemológico de la Didáctica de la Matemática, programa iniciado en Francia, que postula al análisis del *saber* como el punto de entrada al estudio de los *sistemas didácticos.* El EOS es un sistema teórico que intenta articular diversos modelos teóricos usados en la investigación en educación matemática (Brousseau, 1986; Duval, 1995; Chevallard, 1999, entre otros) a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. En este enfoque, el significado de los términos y expresiones se debe buscar en el uso que se hace de ellos y en los juegos de lenguaje de los que forman parte. Este enfoque intenta explicar, entre otros aspectos, la problemática de compatibilizar los *significados institucionales* (comunidad matemática) con los *personales* (estudiantes que se inician en el nivel universitario), desde un punto de vista que articule las dimensiones epistémica, cognitiva, semiótica y ecológica de la actividad matemática.

Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar la potencialidad de algunos de los constructos de este enfoque para el análisis de *sistemas de prácticas institucionales*, en este caso particular, los propuestos por un libro de texto pensado para un curso introductorio de Matemática Discreta o de Algebra de nivel universitario inicial. Asimismo, pretendemos dar cuenta de la diversidad de objetos y procesos que se ponen en juego en la actividad matemática, ayudándonos a desentrañar y tomar conciencia, como docentes, de la complejidad ontosemiótica de estas formas especializadas de utilización del lenguaje. Esto nos permitirá, también, detectar potenciales *conflictos semióticos* que proveen otras explicaciones a las dificultades de los estudiantes para la comprensión de un texto matemático, asumiendo que comprender es "entender; percibir el significado de algo"; "percibir las ideas contenidas en algo dicho o escrito" (en concordancia con el diccionario de uso del español de María Moliner) o, más específicamente desde el EOS, construir o apropiarse del significado institucional de los objetos.

En este sentido, en el apartado 1 de este artículo expondremos algunos de los constructos teóricos centrales que plantea el EOS, en tanto que en el apartado 2 mostraremos un ejemplo donde se pone de manifiesto la utilidad de estas herramientas teóricas en el análisis (ontosemiótico) de un sistema de prácticas matemáticas propuestas por un libro de texto y contextualizadas en Matemática Discreta y Algebra a nivel de primer año de la universidad. Por último, en el apartado 3 esbozaremos algunas consideraciones finales.

1. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos

En este apartado presentaremos una síntesis de las nociones teóricas fundamentales que constituyen el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS).

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. (Godino, Batanero y Font, 2007). El EOS considera la situación-problemática como una noción primitiva y define los conceptos teóricos de *práctica*, *objeto* (personal e institucional) y *significado*, poniendo de manifiesto y operativizando el triple carácter de la matemática al que se ha hecho referencia, así como también la génesis personal e institucional del conocimiento matemático y su interdependencia, cuestiones esenciales para abordar el problema que planteamos en este artículo.

El EOS considera *práctica matemática* a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Estas prácticas pueden ser propias de una persona (prácticas personales) o compartidas en el seno de una institución (prácticas institucionales). Una institución está constituida por personas involucradas en un mismo tipo de problemas y en la cual se llevan a cabo determinadas prácticas sociales con rasgos particulares, que son condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma (entre ellos los lingüísticos), sus reglas y modos de funcionamiento.

En este contexto, el *significado de un objeto matemático* se considera como el emergente de los sistemas de prácticas que realiza una persona (significado personal) o una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas.

Es así que el EOS asume de entrada un cierto pragmatismo ya que se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas a partir de un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por lo tanto, son derivados de dichas prácticas. De esta manera, al objeto matemático se le asigna un estatus derivado, mientras que es a la práctica a la que se le otorga un lugar privilegiado, siendo este un aspecto que diferencia al EOS de otras teorías didácticas.

Estos sistemas de prácticas son fenómenos complejos, para cuyo estudio es necesario considerar, al menos, dos niveles de análisis (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Primer nivel: objetos matemáticos primarios

En este primer nivel se analizan aquellos *objetos primarios* que se pueden observar en un texto matemático. En efecto, ante una situación problemática (que siempre responde a una intencionalidad didáctica) se puede observar la utilización de ciertos lenguajes verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de procedimientos que se realizan para resolver la situación, de conceptos y propiedades que intervienen en dicha resolución y de argumentos que permiten justificar las acciones realizadas y las propiedades utilizadas. Es decir, que cuando una persona realiza una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos, que conforman una configuración referida a dicha práctica.

Al respecto, el EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos)

- Situaciones-problemas (tareas, ejercicios, ...)

- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo…)

- Conceptos-definiciones

- Propiedades (proposiciones o enunciados sobre conceptos)

- Argumentos (usados para validar o explicar las propiedades y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Estos objetos primarios están relacionados entre sí formando configuraciones institucionales (o personales), es decir, redes de objetos intervinientes (o disponibles para una persona) y emergentes de los sistemas de prácticas y relaciones que se establecen entre los mismos.

Al considerar estos seis tipos de entidades primarias, se amplía la distinción tradicional entre entidades conceptuales y procedimentales, las cuales se consideran insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática.

- Segundo nivel: procesos matemáticos y conflictos semióticos.

Este nivel de análisis se centra fundamentalmente en *procesos*[2] que intervienen en la realización de las prácticas matemáticas y también en los que emergen de ellas. La finalidad es profundizar el estudio de la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas, determinando además potenciales *conflictos semióticos,* es decir, disparidades o desajustes entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) (Godino, 2002).

En el análisis de la actividad matemática, en particular en la producción e interpretación de libros de texto, se llevan a cabo una serie de procesos interpretativos que involucran a los objetos matemáticos primarios. El análisis de dichos procesos ha llevado al EOS a la consideración de facetas o dimensiones para los objetos matemáticos que se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Es así que los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- Personal-institucional. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran *objetos institucionales*, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como *objetos personales* (Godino y Batanero, 1994). Lo esencial para la educación matemática es estudiar la relación dialéctica entre la *cognición personal* (resultante del pensamiento y la acción de la persona ante un cierto tipo de problemas) y la *cognición institucional* (resultante del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de personas que forman una comunidad de prácticas).

- Ostensivo-no ostensivo. Ostensivo es cualquier objeto que es público y que se puede mostrar a otros. En general, los objetos matemáticos tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos), pero se usan en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos). Es necesario aclarar que un objeto ostensivo puede ser también pensado por una persona o estar implícito en el discurso matemático, con lo cual claramente la distinción entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan.

- Expresión-contenido. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Esta relación es modelizada desde el EOS a través de *funciones semióticas*, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- Extensivo-intensivo (ejemplar - tipo). Esta dualidad permite explicar otra de las características de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos, centrando la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general. Es así como un objeto puede intervenir en un juego de lenguaje como un caso particular (extensivo/ejemplar) o como una clase más general (intensivo/tipo)

- Unitario-sistémico. Los objetos matemáticos, en algunos casos, participan (en el juego de lenguaje) como entidades unitarias, mientras que, en otros casos, se deben descomponer para su estudio ya que intervienen como sistemas.

La consideración de estas facetas duales permite al EOS la identificación de determinados *procesos cognitivos duales:*

• *proceso de materialización-idealización* (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo): un objeto ostensivo es utilizado para representar, evocar o visualizar un objeto no ostensivo ideal. A su vez, un objeto no ostensivo puede ser materializado mediante uno ostensivo.

• *proceso de particularización-generalización* (dualidad ejemplar-tipo): el análisis de un objeto particular *ejemplar* permite establecer conclusiones sobre un conjunto de objetos y el análisis de un conjunto de objetos permite pensar cómo funciona un caso particular.

• *proceso de descomposición-reificación* (dualidad sistémico-unitario): el problema global puede descomponerse en problemas elementales, es decir, los objetos (unitarios) intervinientes deben ser tratados como sistémicos. Pero, tras el proceso de estudio, los conceptos y propiedades emergentes deben ser reificados, es decir, vistos como objetos unitarios a fin de ser aplicados a la resolución de nuevos problemas.

• *proceso de representación-significación* (dualidad expresión-contenido): consiste en atribuir significado a una expresión. Los procesos de representación y significación son *densos* en la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de problemas.

• *proceso de personalización-institucionalización* (dualidad personal-institucional): en una primera fase de estudio es necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en su resolución (personalización). A su vez, mediante una adecuada gestión docente, se debe promover la institucionalización de los mismos.

Cada uno de estos procesos pueden ser fuente de potenciales *conflictos semióticos*, que lograrían explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

En el Anexo 1 presentamos un esquema que permite visibilizar las relaciones entre estos objetos, dualidades y procesos planteados por el EOS.

2. Análisis basado en el EOS.

En este segundo apartado la intención es mostrar cómo las herramientas que nos provee el EOS nos permiten analizar, en este caso, un fragmento de un libro de texto de Álgebra pensado para asignaturas correspondientes al primer año de la universidad. Este texto aborda algunos aspectos básicos correspondientes a un tema central (Teoría de la divisibilidad) de asignaturas como Matemática Discreta (correspondiente al primer cuatrimestre del primer año del Profesorado y la Licenciatura en Matemática de la UNRC) o Introducción al Algebra (correspondiente al segundo cuatrimestre del primer año de las carreras de Analista en Computación y Profesorado y Licenciatura en Ciencias de la Computación de la UNRC). Vale destacar que este texto puede ser considerado como un *tipo de texto* con características comunes a otros por el *modo de presentación* del tema.

A continuación, transcribimos el fragmento del texto extraído de Johnsonbaugh (2005, pp. 183-184):

> Definición 5.1.1. Sean n y d enteros, $d \neq 0$. Se dice que *d divide a n* si existe un entero q que satisface $n = dq$; q se llama el *cociente* y d el *divisor o factor* de n. Si d divide a n, se escribe $d|n$. Si d no divide a n, se escribe dn
>
> Ejemplo 5.1.2 Como $21 = 3 \cdot 7$, 3 divide a 21 y escribimos $3|21$. El cociente es 7; 3 recibe el nombre de divisor o factor de 21.

Se observa que si n y d son enteros positivos y d|n, entonces d ≤ n. (Si d|n, existe un entero q tal que n = dq. Como n y d son enteros positivos, 1 ≤ q. Por lo tanto, d ≤ dq = n).

Ya sea que un entero d > 0 divida o no a un entero n, se obtiene un cociente único q y un residuo r como lo establece el teorema del cociente-residuo (Teorema 1.8.5): Existen enteros únicos q (cociente) y r (residuo) que satisfacen n = dq + r, 0 ≤ r < d. El residuo r es igual a cero si y sólo si d divide a n.

Algunas propiedades adicionales de los divisores se dan en el siguiente Teorema y serán útiles en el trabajo de este capítulo.

Teorema 5.1.3

Sean m, n y d enteros.

a) Sid|m y d|n, entonces d|(m + n)

b) Si d|m y d|n, entonces d|(m – n).

c) Si d|m, entonces d|mn.

Demostración a) Suponga que d|m y d|n. Por la definición 5.1.1,

$m = dq_1$ (5.1.1) para algún entero q_1 y $n = dq_2$ (5.1.2) para algún entero q_2 .

Si se suman las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2), se obtiene

$m + n = dq_1 + dq_2 = d(q_1 + q_2)$.

Por lo tanto, d divide a m + n (con cociente $q_1 + q_2$). Esto prueba el inciso a). Las pruebas de los incisos b) y c) se dejan como ejercicios (vea los ejercicios 27 y 28).

En este fragmento de texto, en una primera instancia, podemos vislumbrar ciertos *personajes* principales, *objetos matemáticos primarios*, por ejemplo:

- Definiciones:

- Hay algunas definiciones que se utilizan y están implícitas (previas), como por ejemplo las definiciones de *número entero*, de *suma*, *resta* y *producto entre números enteros*, de *números positivos*, de , de *cociente*, de *residuo*. Debemos aclarar que la definición de cociente que se considera dada es aquella que está implícita en el teorema 1.8.5, es decir el cociente sería el único entero q que, junto con un único entero r, verifican que n =d.q+r con 0r <d, esto para cualquier par de enteros n y d.
- Otras definiciones se proporcionan en el texto, tal es el caso de la definición de *divide a*, *cociente* (esta vez como el entero q que satisface que n = d.q para el caso en que d divida a n), *divisor* o *factor*.

- Propiedades:

Aquí también hay algunas propiedades que se utilizan, algunas implícitamente y otras de manera explícita, y que se suponen ya conocidas o cuya justificación en todo caso queda a cargo del alumno, como por ejemplo:

P1:“Dados x e y dos enteros positivos y z un entero: si x=y.z entonces z 1”

P2:“Dados x,y,z y w enteros positivos, si xy y zw entonces x.z y.w.”

P3: “Teorema del cociente-residuo (o Algoritmo de la división entera): Dados n y d dos enteros, existen enteros únicos q (cociente) y r (residuo) que satisfacen n= d.q+r, 0rd.”

P4: “Si x,y,z,w son enteros y x=y y z=w entonces x+z=y+w”.

P5: “Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: Si x,y,z son enteros entonces x(y+z)=x. y+x.z” (factor común)

P6:“Ley de cierre de la suma en Z: si x e y son enteros, x+y es entero”

Otras propiedades son presentadas como “nuevas” en el texto, por ejemplo:

P7: “Si n y d son enteros positivos y d | n entonces d ≤ n”.

P8: “El residuo es 0 si y sólo si d divide a n”

P9: “Sean m,n y d enteros.

a) Si d | m y d | n, entonces d | m+n

b) Si d | m y d | n, entonces d | m-n

c) Si d | m, entonces d | m.n”

- Procedimientos

Podemos ver que hay ciertas *acciones o procedimientos* que utiliza el autor en el texto. Entre estas acciones podrían estar las de *definir*, *ejemplificar*, *explicitar propiedades*, *demostrar esas propiedades*, *proponer tareas*, pero nos interesa, específicamente, qué procedimientos *matemáticos* están presentes en el texto, y en este sentido, podemos mencionar:

- Escribir el 21 como 3.7 (para argumentar que 3 divide a 21)

Cada paso que realiza para demostrar la P7, es decir:

- Suponer que d | n
- Aplicar la definición de “|” para “deducir” que “existe un entero q tal que n =d.q”.
- Utilizar la P_1 para deducir que entonces 1 ≤ q.
- Aplicar la P_2 para deducir de esto que d ≤ d.q = n.

Cada paso que realiza para demostrar la propiedad P9 a):

- Suponer que d | m y d | n
- Utilizar la definición de “|” para deducir que entonces m = d. q_1 para algún entero q_1 y n = d. q_2 para algún entero q_2.
- “Sumar las ecuaciones” (aplicar la propiedad P4), para deducir que m+n = d.q_1 + d.q_2
- Aplicar la P5 para decir que este último término es, a su vez igual a d.(q_1 + q_2).
- Deducir que, entonces, d | m+n (con cociente q_1 + q_2) (utilizando la definición de “|”)

- Argumentaciones:

  En principio se pueden observar algunas argumentaciones en el texto, como por ejemplo:

- Escribir el 21 como 3.7 para justificar que 3 divide a 21.
- Se justifica la propiedad P7: "Si n y d son enteros positivos y d | n entonces d ≤ n", a través de la siguiente argumentación: "Si d|n, existe un entero q tal que n = dq. Como n y d son enteros positivos, 1 ≤ q. Por lo tanto, d ≤ dq = n"
- Se justifica la propiedad P9 a): "Sean m,n y d enteros. Si d | m y d | n, entonces d | m+n" mediante la siguiente argumentación:

  "Suponga que d|m y d|n. Por la definición 5.1.1,

  $m = dq_1$ (5.1.1) para algún entero q_1 y $n = dq_2$ (5.1.2) para algún entero q_2 .

  Si se suman las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2), se obtiene

  $m + n = dq_1 + dq_2 = d(q_1 + q_2)$.

  Por lo tanto, d divide a m + n (con cociente $q_1 + q_2$)".

- Todas las argumentaciones presentadas en el texto son de tipo deductivas. ¿Qué significa esto? Las *demostraciones* de la P7 como de la P9 a), son cadenas de proposiciones donde en cada una de ellas se deduce de otra/otras anteriores mediante definiciones o propiedades ya establecidas o mediante reglas de inferencia de la lógica deductiva.

  En el caso de las propiedades demostradas, las reglas lógicas que subyacen en la demostración son la "introducción del generalizador" (si una propiedad vale para un individuo "x" particular "arbitrario" de un conjunto, entonces vale para todo los individuos de dicho conjunto" y también el "Teorema de la deducción" (si suponemos que vale A y de ese supuesto llegamos a deducir B, entonces ponemos concluir A→B)

- Tareas:

  - La única tarea que se deja planteada para el alumno en este fragmento de texto es la prueba de los incisos b) y c) del Teorema 5.1.3 (P9 b) y c)).

- Lenguaje:

Como ya hemos mencionado, el lenguaje es la parte ostensiva de todos los elementos anteriores. A lo largo del texto se utiliza un lenguaje específico de la matemática donde interviene lenguaje de tipo coloquial y también simbólico.

En particular, por ejemplo, en la definición 5.1.1, la relación de divisibilidad primero se expresa en términos coloquiales "d divide a n" y luego se da una notación simbólico-algebraica para expresar esta relación: "d | n". La condición para que esto se cumpla está dada en términos simbólico-algebraicos: "si existe un entero q que satisface n = dq".

Las propiedades, en particular la P3, P7, P8 y P9, están presentadas en un lenguaje simbólico- algebraico, al igual que las argumentaciones de las propiedades P7 y P9.

En las definiciones, propiedades y argumentaciones se apela a los términos coloquiales "existe…", "para algún entero…”, para dar cuenta del cuantificador lógico (o bien: “si n y d son enteros positivos” o “sean n y d enteros…” que refieren al cuantificador universal (para todo…). Asimismo, se utiliza la expresión coloquial “si….entonces…” para expresar las proposiciones condicionales que involucran a la implicación lógica: “→”.

Ahora bien, esta es una primera mirada del texto, un primer nivel de análisis como se anticipara. En un segundo nivel de análisis, debemos ahondar en las relaciones y en el juego de lenguaje en el que participan estos elementos primarios, con lo cual podemos identificar *dualidades y procesos* que esta actividad matemática estaría involucrando y demandando por parte de los alumnos para su comprensión.

- *proceso de materialización-idealización*:

El ostensivo coloquial “d divide a n” o simbólico “d | n” materializa una relación entre dos números enteros n y d, con d ≠ 0. Así mismo, el ostensivo d n está evocando la idea de que esa relación no es válida entre d y n.

Por otra parte, el ostensivo “existe un entero q que satisface n = dq” materializa la idea de que el número n se puede escribir como el producto de d por algún número entero q. En este caso, notemos que un ostensivo como el símbolo de multiplicar en la expresión dq debe ser “pensado” por el lector (alumno) ya que se encuentra implícito en el texto.

Los enunciados de las propiedades demostradas, en particular de P7, P8 y P9a) son representaciones de propiedades de la relación de divisibilidad, por ejemplo el enunciado P9a) está representando la propiedad de divisibilidad según la cual “si un entero divide a otros dos, divide también a su suma”.

El enunciado de P3) está representando la idea de que para cada par de enteros, existe un cociente q y un resto r, que verifican determinadas condiciones.

-*proceso de particularización-generalización*:

El ejemplo 5.1.2 es un caso particular de la definición general 5.1.1. de “divide a”.

Las propiedades utilizadas y presentadas en el texto, son todas afirmaciones generales. Por ejemplo, cuando se plantea “Sean m, n y d enteros…” se está afirmando que “para todo m, para todo n, para todo d enteros….”. Para llevar a cabo la demostración de este tipo de propiedades, el alumno deberá realizar un proceso de particularización muy especial, que consiste en tomar un m, un n y un d particulares pero “arbitrarios”, y demostrar que para ellos vale la propiedad, por ejemplo que, para ellos se cumple que “si d | m y d | n, entonces d | m+n”. Una vez hecho esto, debería realizar una generalización para afirmar que la propiedad demostrada vale para todo d, m y n enteros.

- *proceso de descomposición-reificación*:

En el texto se presenta la definición de “n divide a d”, cociente, divisor, un ejemplo, un intento de relación de esta definición con el teorema del cociente-residuo (Algoritmo de la división entera) y algunas propiedades que tienen “los divisores”. Todos estos “elementos” deben ser sometidos a un proceso de reificación por parte del alumno para poder comenzar a dar significado a una relación particular “de divisibilidad” que se define en el conjunto de los números enteros.

-*proceso de representación-significación*:

El proceso de estudio que se propone en el texto se apoya en el uso de ciertos términos y símbolos a los cuales el alumno debe otorgar significado, tal es el caso de los términos “d divide a n”, “d|n”, “dn” “cociente”, “factor”, “residuo”…

Es necesario también que el alumno otorgue significado a las propiedades que se utilizan y se plantean, en el sentido que mencionábamos anteriormente:

Por ejemplo, otorgar significado a P7, en términos de que si un número entero positivo divide a otro seguro es menor o igual que él y a P8 como una condición necesaria y suficiente para que d divida a n, resignificando la definición inicial de “divide”, de manera que no se vincule sólo a la multiplicación (“d divide a n si existe un entero q que satisface n =d.q”), sino que se inserte en el contexto de la división entera.

Dar una significación a P9 en términos de que si un entero divide a otros dos divide también a su suma, y a su resta. Y que si un número divide a otro, también divide a cualquier múltiplo de él.

Todos estos procesos, tal como lo mencionábamos anteriormente, son fuente de *potenciales conflictos semióticos*, entre los que podemos detectar los siguientes:

-La falta o disparidad de significado otorgado a la expresión “d divide a n”. Esta expresión generalmente remite a los alumnos al hecho de que “al dividir n por d el resto es 0”. Es decir, el significado personal de los alumnos puede estar más ligado a la operación de división que tienen disponible (o sea, a lo que luego se intenta plantear en la P8) y no a la existencia de un q entero de modo que n =d.q, definición que es la base de la teoría de la divisibilidad.

-Así mismo, el uso del ostensivo “d | n” puede remitir a los alumnos a la operación “d dividido n” o a la fracción, dada la similitud del “símbolo” utilizado para materializar cada uno de estos no ostensivos.

-La expresión “existe un entero q que satisface n = dq” puede no relacionarse con el contenido que se pretende, esto es “n se puede escribir como el producto de d por algún entero q”

- Dificultades en el otorgamiento de significado a cada una de las propiedades utilizadas y planteadas, en particular a P3 (Algoritmo de la división entera), en tanto a ser un teorema que asegura (para cualquier par de enteros positivos) la existencia y unicidad de un cociente q y un residuo r que satisfacen ciertas condiciones y su relación con la P8.

- Conflictos ligados a la argumentación de las propiedades que se presentan, los cuales pueden ir desde el problema de comprender que se trata de proposiciones generales y que para ello es necesario plantear un tipo de demostración deductiva, pasando por problemas lógicos para entender que para demostrar una generalización es necesario considerar unos elementos particulares que son a su vez arbitrarios y que para demostrar una implicación basta suponer el antecedente y deducir el consecuente, hasta cuestiones ligadas a la disponibilidad de las definiciones y propiedades que se utilizan en cada caso.

En el caso de la P8, en particular, la demostración no se materializa en el texto, quizás porque se supone que el alumno podrá realizar las relaciones necesarias para justificar la propiedad al haberse dado la definición de *divide* y enunciarse el Algoritmo de la división entera. Pero consideramos que la justificación de esta propiedad (P8) no es inmediata para los alumnos y que esta justificación, así como la relación de la propiedad con los significados personales de los alumnos acerca de la expresión “d divide a n” (ligada al resto de la división), pueden ser fuente de nuevos conflictos.

En este fragmento de texto podemos observar la ausencia de situaciones problemáticas o tareas planteadas a los estudiantes, salvo aquellas que se proponen al final que tienen que ver con *demostrar* otras propiedades P9b) y P9c), teniendo como base la demostración de la propiedad P9a). Las argumentaciones presentadas son puramente deductivas. Las propiedades se presentan al alumno como ya establecidas, sin brindar al lector (al alumno) la posibilidad de construirlas por sí mismo a partir de tareas o preguntas que lo lleven a producir nuevas relaciones y a ser un *proponente* de dichas propiedades (Brousseau, 2007). Algo similar podríamos plantear en torno a las relaciones que se establecen en el texto entre la relación de divisibilidad y el algoritmo de la división entera.

Este análisis permite ver la variedad de objetos que debe tener disponible un alumno, así como los procesos cognitivos que debería poner en funcionamiento para poder *leer otorgando significado* al sistema de prácticas presentada por el texto y a los objetos que se pretenden que emerjan a partir del mismo. Pone en evidencia, también, que este tipo de presentación deductiva de la temática puede producir una gran diversidad de conflictos semióticos, ya que profundiza la distancia entre los significados institucionales (representados por el texto) y los significados personales de los alumnos. Además, pone de manifiesto que el lenguaje utilizado por el autor es un componente clave en la necesaria construcción y compatibilización de significados para la comprensión del texto por parte de los estudiantes.

3. Reflexiones finales

En este trabajo hemos intentado, por un lado, mostrar la potencialidad de algunos constructos teóricos del EOS para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje. En este caso lo que hemos analizado es sólo un extracto de un libro de texto, pero estas herramientas son igualmente aplicables para el análisis *a priori* de un diseño de clase o el análisis *a posteriori* de protocolos de respuestas de los alumnos a situaciones problemas.

Este tipo de análisis permite poner de manifiesto todos los objetos, relaciones y procesos que se ponen en funcionamiento en la actividad matemática, es decir, permite entrever la complejidad ontosemiótica de dicha actividad y los conflictos semióticos potenciales que pueden surgir de la misma. Pero también, y esto específicamente relacionado a los libros de texto, pone de manifiesto el hecho que bien explicita Carlino (2005) respecto a que, al ingresar a la educación superior, les estamos exigiendo a nuestros alumnos leer textos con características muy diferentes, determinadas por la naturaleza propia de los saberes en juego y que, desde nuestro punto de vista, está íntimamente relacionada con ciertos modos de hacer y decir propios de nuestra disciplina: la matemática.

Es necesario, entonces, tal como lo expresa Carlino (2005), que como docentes seamos conscientes de las características de los textos y de la nueva cultura a la que aspiran los estudiantes. Que seamos conscientes de que los alumnos se enfrentan a textos que muchas veces naturalizan la red de relaciones que exige la comprensión de un objeto, omiten ciertos aspectos de la misma bajo el supuesto de que el lector los va a poder reconstruir y desatienden otros modos de hacer y decir que son fundamentales para la construcción del conocimiento (planteo de situaciones problemáticas, elaboración de conjeturas, argumentaciones de tipo no deductivas, entre otras) al optar por presentaciones que ponen el énfasis en el modo de hacer deductivo de la matemática.

Como docentes e investigadores, nos enfrentamos así, a un gran desafío, que implica la construcción de otras vías y condiciones de acceso al conocimiento a fin de generar procesos de estudio de mayor idoneidad epistémica y cognitiva.

Notas

1. Este artículo fue elaborado en el marco del Proyecto de Investigación: Análisis de prácticas, objetos y procesos como condicionantes de diferentes estudios didáctico-matemáticos en la educación superior inicial y continua. Este proyecto forma parte del Programa de Investigaciones Interdisciplinarias sobre el Aprendizaje de las Ciencias (PIIAC), subsidiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la U.N.R.C.

2. En este sentido debemos destacar que el EOS reconoce la existencia de una gran diversidad de procesos que se ponen en juego en la actividad matemática. De hecho, la emergencia de los objetos primarios de una configuración (lenguaje, problemas, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, elaboración de procedimientos, definición, enunciación, argumentación. A su vez destaca mega procesos en la actividad matemática como lo son la resolución de problemas y la modelización, entre otros.

Referencias

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. R*echerches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Carlino, P. (2005) *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica.* Buenos Aires, Argentina: Fondo de Cultura Económica.

Chevallard, Y. (1999). L`analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine.* Suiza, Berna: Peter Lang.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 237-284. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En Estepa, A.; Contreras, A.; Deulofeu, J.; Penalva, M. C.; García, F. J. y Ordoñez, L. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática* XVI, 49-68. Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Godino, J.D.; Batanero, C. y Font, V (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. (Versión ampliada en español). Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas Discretas*. México DF, México: Pearson. Prentice Hall.

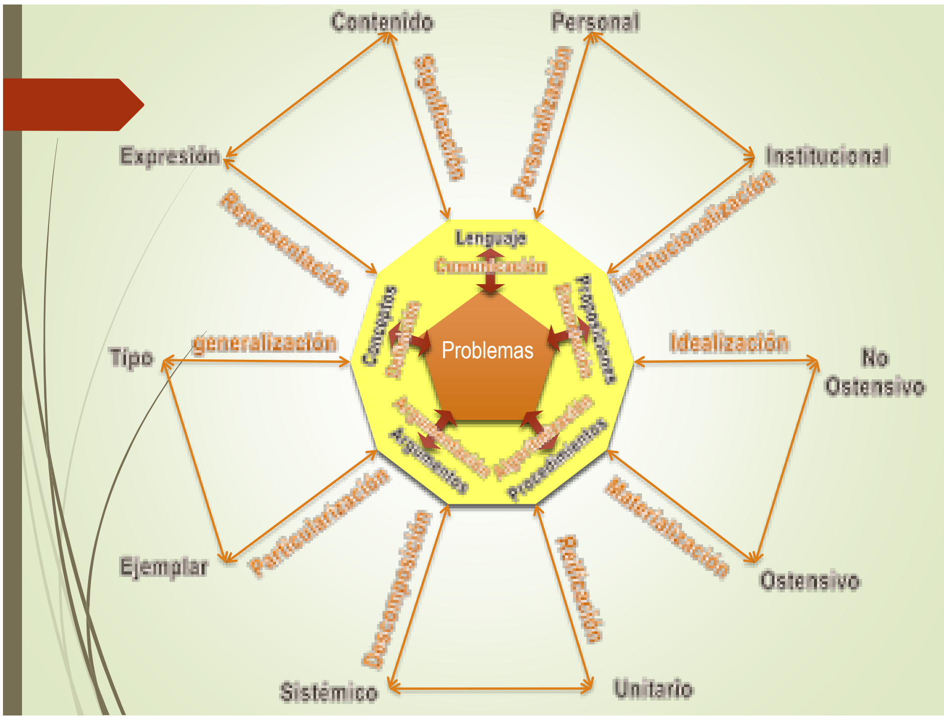
Lemke, J. (1997). *Aprender a hablar ciencia.* Barcelona, España: Paidós.

Vázquez, A. (2007). ¿Alfabetización en la Universidad? En Rivarosa, A. (Ed) *Estaciones para el Debate. Un mapa de diálogo con la cultura universitaria* (pp.19-26) Río Cuarto, Argentina: Universidad Nacional de Río cuarto.

Articulo recibido: 11 de octubre de 2017

Artículo aceptado: 9 de mayo de 2018

Anexo 1



Configuración de objetos y procesos (Godino, Batanero y Font, 2007)