Revista semestral de filosofía

Reglas lógicas y modelos de investigación en las ciencias formales

Alejandra Ciruelos
Universidad Nacional de Río Cuarto

Introducción

En el libro *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático* de Imre Lakatos -que fuera editado póstumamente por sus discípulos y colegas John Worrall y Elie Zahar-, este autor nos dice en la página 163: "La mayoría de las situaciones problemáticas se plantean en las teorías matemáticas en desarrollo, donde los conceptos que están apareciendo son los vehículos del progreso y donde los desarrollos más interesantes provienen de la exploración de las regiones fronterizas de los conceptos, de su extensión y de la diferenciación de conceptos anteriormente indiferentes. La intuición carece de experiencia en estas teorías en desarrollo, por lo que se equivoca y tropieza. No hay teoría que no haya pasado por tal período de desarrollo. Además, dicho período resulta el más interesante desde el punto de vista histórico y debiera ser el más importante desde el punto de vista de la enseñanza" [1].

Esta cita encierra una riqueza de significaciones que nos abre a múltiples cuestiones filosóficas acerca de la matemática, y, por extensión, a las ciencias formales. Con el horizonte puesto en la última oración de esta cita de Lakatos, *"…y debiera ser el más importante desde el punto de vista de la enseñanza"*, intentaré avanzar hacia los aspectos exploratorios de las regiones fronterizas de la investigación en las teorías matemáticas y lógicas, sobre los equívocos y tropiezos, sobre la historia y sobre la educación.

El siglo actual, heredero de una visión infalibilista del saber científico, asentado sobre un mullido lecho de certezas -aunque en muchos casos tan ciertas como frágiles e ilusorias-, nos encuentra repensando antiguas cuestiones que durante varios siglos fueron expulsadas a la marginalidad de los principales intereses académicos. Entre ellas: la relación de la lógica con la metodología de la investigación –dos dimensiones inseparables para Aristóteles-, el incesante vaivén entre el descubrimiento y la validez de las hipótesis científicas, la fecundidad que anida en las ideas ambiguas, la posibilidad de reglas lógicas no deductivas para actuar en las zonas fronterizas y para explorar algún concepto nuevo -inseguro pero necesario para el desarrollo del conocimiento-, y otras cuestiones relacionadas.

Tomando algunos elementos de esta constelación de nociones filosóficas, en este trabajo analizo, en primer lugar, algunos aspectos de las reglas lógicas en el marco de los dos modelos de investigación que circulan en el campo de las ciencias formales, a saber: el modelo analítico y el modelo axiomático. La noción de generalidad y ciertas características de los lenguajes correspondientes a sendos modelos, constituirán el eje de una separación dicotómica establecido entre el conjunto de reglas que pertenecen a uno u otro de los modelos mencionados.

En segundo lugar realizo algunas consideraciones sobre las reglas lógicas en general, sugeridas por las reflexiones de L. Wittgenstein en sus *Investigaciones Filosóficas*. En base a éstas, señalo que las reglas lógicas

[1] Imre Lakatos, *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático,* Madrid, 1994, Alianza Editorial.

juegan un papel fundamental en la formación del sujeto, no sólo en la investigación en las ciencias formales sino también en la educación en general como instancia formativa.

En este sentido muchas de las reglas que adquieren un rol preponderante en los períodos de las teorías en desarrollo se vuelven importantes no sólo para esas mismas teorías particulares sino que lo son *desde el punto de vista de la enseñanza*.

Finalmente propongo que los modelos mencionados si bien tienen una impronta general que los diferencia, sin embargo en algún sentido no se excluyen ni se contraponen necesariamente, sino que es posible tender un puente entre ellos. A este respecto recojo la visión crítica de E. Grosholz y de E. Morin quienes, desde distintas procedencias y formaciones, convergen en una mirada superadora de las tensiones teóricas presentes entre los modelos axiomático y analítico.

Dos modelos de investigación: El axiomático y el analítico

El formalismo matemático de comienzos del siglo XX marcó una fuerte impronta en la historia interna de la matemática donde los estudios metamatemáticos de D. Hilbert, conocidos como "el programa de Hilbert", representan la cumbre de un modelo de hacer matemática que reconoce sus raíces en el método axiomático de Aristóteles -según su concepción sobre cómo debe ser presentado el conocimiento científico- y de Euclides -el geómetra del siglo IV a.C. Este enfoque -al que llamaré *modelo axiomático de investigación en las ciencias formales*- deviene en paradigma dominante acerca de lo que es la matemática y la actividad del matemático, consolidándose como el modelo más acabado de un estilo deductivista. Desde esta perspectiva se caracteriza a los sistemas formales como cálculos deductivamente ordenados en axiomas y teoremas, en los cuales las reglas de inferencia -que establecen la verdad de los teoremas- son aquellas donde el salto lógico es necesario, constituyéndose en las garantes de la preservación de la tautologicidad. Ejemplos de ellas son la muy conocidas *Teorema de la Deducción*, *Modus Ponens*, *Introducción del Generalizador*, etc.

Estos sistemas son de carácter sintáctico; la ausencia de cualquier componente semántico, lejos de considerarse una limitación, muestra su capacidad de recibir diferentes interpretaciones y poder ser transformados en teorías fácticas significativas, en este último caso sus axiomas se convierten en enunciados hipotéticamente verdaderos para un ámbito determinado. Uno de los objetivos principales de este modelo es la justificación rigurosa de los teoremas, que se logra cuando éstos han sido deducidos de axiomas indemostrables, elegidos en base a criterios de razonabilidad y establecidos –se espera- de una vez para siempre. Este movimiento también ha sido llamado *top-down*, nombre que permite visualizar, de alguna manera, cómo el proceso deductivo converge de manera lineal en cada teorema a demostrar, exhibiendo ostensiblemente la necesidad de una coherencia lógica interna.

Por otra parte, el *modelo analítico de investigación* asume –a primera vista- un carácter más flexible y dinámico de construcción del conocimiento. Está asociado al método analítico *á la Platón*[2], donde el punto de partida de la investigación es un problema a ser examinado -y no principios indemostrables. Como todo sistema abierto el problema puede sugerir múltiples hipótesis que lo resuelvan –incluso provenientes de diferentes áreas-, entre cuyas fluctuaciones el matemático se definirá por una de las candidatas en función de su plausibilidad; inmediatamente después esa hipótesis/solución se convierte en un nuevo problema a ser explicado, repitiéndose este movimiento de bucle en un devenir nolineal. Como sostiene C. Cellucci [3], el procedimiento que parte de problemas puede ser visto como una búsqueda hacia atrás, en el sentido de que no comienza con determinados principios establecidos sino que se retrotrae continuamente hacia

[2] Platón en el diálogo *Menón* aplica el método por hipótesis –el modo de operar de los geómetras- en la resolución de la cuestión de 'si la virtud es enseñable'.

[3] Carlo Cellucci, From closed to open systems, en *Philosophy of mathematics: Proceedings of the 15th International Wittgenstein Symposium,* 1993, Wien. J. Czermak (ed.)

hipótesis que expliquen el problema. Las hipótesis serán obtenidas, en general, por la aplicación de reglas heurísticas, entendidas como *ars inveniendi*. Esa búsqueda hacia atrás se expresa también con el nombre de movimiento *bottom-up*.

Así, en este método el punto de partida es un problema concreto, situado, es decir, una pregunta o cuestión abierta y la finalidad es hallar una hipótesis que dé solución al problema. La búsqueda de hipótesis se realiza por medio de mecanismos nodeductivos como la inducción, la analogía, etc, en un espacio abierto, no predeterminado, que incluye diversas áreas de conocimiento. En este proceso, que es potencialmente infinito, el problema puede ser modificado, precisado o cambiado. El recorrido del descubrimiento comprende la continua evaluación de cada una de las hipótesis y por ende su justificación, que consiste básicamente en evaluar los argumentos y valorar su respaldo o no a las hipótesis; por lo tanto, la justificación es parte del mismo proceso de descubrimiento.

La separación entre los momentos de descubrimiento y de justificación -introducida por primera vez por Hans Reichenbach en su obra *Experience and Prediction* de 1938- muestra, a su vez, un punto de separación entre ambos modelos en tanto y en cuanto el modelo axiomático se interesa por la justificación de teoremas y el analítico incluye el descubrimiento y la justificación como parte del mismo proceso indagatorio. Esta separación, motivada por la exigencia de rigor que a fines del siglo XIX se instaló a raíz de la necesidad de una fundamentación sólida de la matemática -amenazada por la presencia de contradicciones- muestra también la forzada separación de la lógica con la metodología, que por siglos habían permanecido unidas.

Efectivamente, entre las tareas asignadas por Aristóteles a la lógica prevalece aquélla que analiza el conocimiento científico vinculado a los principios lógicos, es decir al estrecho e indisociable vínculo que el filósofo concibió entre la lógica y la metodología en el proceso de la investigación científica. Francisco Larroyo, en su estudio introductorio a los *Tratados de Lógica* de Aristóteles, lo expresa de esta manera:"El designio inmediato de la lógica aristotélica es por completo *metodológico*. Semejante disciplina se propone mostrar el camino a través del cual puede alcanzarse el conocimiento científico. Así como en la retórica se enseña el arte de persuadir, en la lógica se alecciona sobre el arte de investigar, conocer y probar científicamente"[4].

El arte de investigar, conocer y probar científicamente son tareas que se concibieron juntas en los comienzos de la filosofía occidental pero que toman caminos separados ante la exigencia de rigor que llevó a desestimar todo mecanismo heurístico como susceptible de fuente de error y, por consiguiente, no confiable para el conocimiento científico. Aquella separación colocó a las reglas lógicas en dos estancos separados: o bien pertenecían al contexto de descubrimiento o bien al contexto de justificación. El criterio que determinó esa pertenencia se basa en el tipo de inferencia lógica que cada regla es capaz de garantizar; las inferencias deductivas se caracterizan por ser necesarias y por lo tanto caen dentro del ámbito de los mecanismos que validan rigurosa y unívocamente una sentencia –ámbito de justificación-; mientras que las inferencias nodeductivas son contingentes en el sentido de que el salto lógico de las premisas a la conclusión no está absolutamente garantizado y esto implica que la conclusión podría ser otra que la inicialmente pretendida –ámbito de descubrimiento-.

Entre las reglas representativas de cada uno de los modelos de investigación mencionados pongo los siguientes ejemplos disponiéndolas en dos grupos: *Grupo I* y *Grupo II*. En términos generales las reglas deductivas han tenido un rol preponderante en la demostración de la verdad de ciertos enunciados mientras que las reglas nodeductivas han jugado un papel fundamental en la búsqueda y descubrimiento de nuevos conocimientos, tal el caso de la abajo mencionada *Regla de la Analogía* cuya aplicación permitió a E.

[4] Francisco Larroyo, "Estudio introductivo" a los *Tratados de Lógica* de Aristóteles. México, 1993, Editorial Porrúa, pág. XLIII.

Rutherford, en 1911, descubrir el modelo del átomo a partir del modelo del sol y un planeta, vinculando proporcionalmente la fuerza gravitatoria entre ambos sistemas.

Grupo I: Reglas deductivas:

1) *Introducción del Generalizador (IG)*:

$$\begin{array}{l} \boxed{c} \\ \hline \vdots \\ P(c) \\ \forall x P(x) \end{array}$$

2) *Modus Ponens (MP):*

$$\begin{array}{l} A(x) \rightarrow B(x) \\ \underline{A(x) \qquad\quad .} \\ B(x) \end{array}$$

Grupo II: Reglas nodeductivas[5]:

1) *Inducción a partir de un caso simple*:

$$\begin{array}{l} \underline{\quad A(a) \quad B(a) \quad . \quad} \\ \forall x\, A(x) \rightarrow B(x) \end{array}$$

2) *Analogía:*

$$\begin{array}{l} \underline{a \approx b \;\; A(a)} \\ \quad A(b) \end{array}$$

3) *Metáfora:*

$$\begin{array}{l} \underline{T \rightarrow S,\, a \in T,\, x \in S \wedge A(x)} \\ \qquad\quad A(a) \end{array}$$

Si bien esta presentación formal de las reglas pudiera sugerir que responden a un mismo modelo, sin embargo se encuentran entre estos dos grupos diferencias cualitativas de índole muy significativa[6]. Me refiero principalmente a las cuestiones sobre la homogeneidad o heterogeneidad de los lenguajes que emplea cada grupo, a la noción de generalización asociada a esos lenguajes y a las acciones que sus reglas instituyen.

[5] C. Cellucci en su Op. Cit. ofrece ejemplos de casos históricos de descubrimiento realizados con la aplicación de estas reglas.

[6] Además de la característica fundamental, ya expresada, que está definida por el tipo de salto lógico de las premisas a la conclusión; es decir si la inferencia es necesaria o es contingente.

La generalización y el lenguaje:

Es importante distinguir varios significados del término 'generalización' o 'generalidad' ya que un uso desatento del mismo puede inducir a confusiones; en esta distinción es pertinente establecer claramente el vínculo que aquélla mantiene con la instancia particular y la característica general del lenguaje al que está asociado.

Hay un concepto de generalización en el marco de la filosofía del empirismo que –*grosso modo*-sostiene que el conocimiento es un proceso cognitivo que consiste en la abstracción a partir de instancias particulares sobre cuya base se forman todos nuestros conceptos –inclusive los términos generales. No es éste el concepto de generalidad o generalización que aquí interesa sino otras dos nociones, las que pueden verse, a su vez, como diferentes maneras de trabajar en el proceso de investigación en las ciencias formales.

I-

Una de estas maneras es la que se da en el ámbito de la lógica matemática con la utilización de un lenguaje formal homogéneo (adaptable a todo tipo de contenido, es decir lo que se conoce como 'neutral respecto al tópico'). Esta forma implica la utilización de los cuantificadores –el generalizador y el particularizador- aplicables a todos los objetos de un determinado universo de discurso; su lenguaje simbólico conlleva una concepción de generalidad entendida como abstracción propia de una semántica extensional (que difiere del concepto de abstracción del empirismo). La generalidad aquí está en función del objetivo de disponer de un simbolismo que evite la ambigüedad y la vaguedad, y en el cual queden explícitamente formuladas las premisas necesarias para justificar, establecer o demostrar la verdad de una afirmación.

La propuesta de un lenguaje formal, simbólico, que supere la ambigüedad y la vaguedad propias de los lenguajes naturales y que sirva a la ciencia, se apoya en el Principio de Extensionalidad –donde la referencia se fija sobre objetos y no sobre propiedades de objetos. Por este principio se establece, por ejemplo, que dos conjuntos son el mismo conjunto si poseen los mismos elementos, sin tener en cuenta propiedad alguna para este fin. Así, en la lógica extensional los denotados juegan un papel importante, a diferencia de las propiedades que, al no tener este carácter extensional que permita decidir cuándo dos propiedades sean idénticas, vuelve dificultosa su individuación.

G. Frege expresa esta diferencia al ejemplificar dos enunciados con diferentes sentidos pero que refieren al mismo objeto:

> Mientras la referencia siga siendo la misma, pueden tolerarse estas oscilaciones del sentido, a pesar de que deben evitarse en el edificio conceptual de una ciencia demostrativa y que no deberían aparecer en un lenguaje perfecto[7] [8].

La referencia, es decir, el denotado de un enunciado –continúa Frege- tiene valor en cuanto nos remite a la verdad, búsqueda que pertenece al ámbito de la ciencia y no del arte,

> Al escuchar un poema épico, por ejemplo, nos cautivan, además de la eufonía del lenguaje, el sentido de los enunciados y las representaciones y sentimientos despertados por ellos. Si nos preguntásemos por su verdad, abandonaríamos el goce estético y nos dedicaríamos a un examen científico [9].

La teoría de la referencia y la construcción de un lenguaje sin fisuras se perfilan como el medio seguro para la verdad científica; en cambio, desde un punto de vista intensional es imposible agotar la totalidad de

---

[7] Gottlob Frege, "Sobre sentido y referencia", en *Estudios sobre Semántica.* Barcelona, 1984, Ed. Orbis S.A., pág 54.

[8] Sin embargo, Frege estaba interesado en el lenguaje simbólico en la medida que este lenguaje pudiera sistematizar y expresar el contenido.

[9] Op. cit, pág 61.

los sentidos y la referencia no es suficiente para determinar cuándo dos propiedades son iguales. En este sentido la abstracción lograda con un lenguaje homogéneo permite ser utilizada, por ejemplo, en las definiciones por abstracción, tan necesarias en el campo de la matemática.

La definición por abstracción es un tipo de definición que depende de las relaciones de equivalencia[10] y no de la explicitación de las propiedades. Por ejemplo si queremos definir 'dirección de una recta' en lugar de mencionar las características del concepto de 'dirección', se recurre a la definición por abstracción. Según lo explica Colaccilli de Muro[11], el procedimiento es el siguiente:

> 1°) Se recurre a una relación de equivalencia; en este caso a la relación 'ser paralela a' entre rectas. Mediante esta relación de equivalencia obtenemos las clases de equivalencia mutuamente excluyentes.
>
> 2°) Cada una de esas clases de equivalencia tendrá asociada una propiedad común a todas las rectas que pertenecen a ella: en primer lugar, serán todas paralelas entre sí, pero además observamos, por el mismo hecho de ser paralelas entre sí, que todas ellas tienen la misma dirección.
>
> 3°) Esta propiedad 'tener la misma dirección' ha quedado determinada por su extensión, de modo que ahora podemos formular la siguiente definición: 'La dirección de una recta' se define, por abstracción, como 'la clase de todas las rectas que son paralelas a ella' (o sea: como 'una de las clases de equivalencia de la relación de paralelismo entre rectas')

Las definiciones por abstracción permiten introducir nuevos conceptos: a partir de la relación de equivalencia 'ser paralela a' se introduce el concepto 'la dirección de una recta'. Si bien ese concepto introducido expresa una determinada propiedad de un objeto cualquiera, sin embargo la definición de esa propiedad depende de los objetos que la poseen. En el ejemplo se define cuál es la dirección de una recta, pero no el significado de 'dirección'; otros ejemplos ofrecidos por el autor son la definición de 'la forma de un polígono', pero no el significado de 'forma'; 'la cardinalidad de un conjunto', pero no el significado de 'cardinalidad'; etc.

Estas consideraciones sobre el significado de generalidad asociado a la abstracción muestran que aquélla va íntimamente ligada, como se indicó más arriba, a la construcción de un lenguaje artificial, simbólico, sin fisuras, es decir a la necesidad de un lenguaje homogéneo que no necesite expresar la diversidad de significados que las propiedades puedan sugerir y que evite las sutilezas y matices propio de los lenguajes naturales; el lenguaje de la lógica de primer orden es un claro ejemplo de esto.

La finalidad de la formalización del lenguaje, para el enfoque axiomático, es lograr precisión y univocidad; de este modo la abstracción queda plasmada en un lenguaje perfecto necesario para la ciencia demostrativa.

II-

La otra idea de generalidad que interesa destacar en el marco de los dos modelos de investigación, corresponde al enfoque analítico y está asociada al estudio de un caso particular; caso que resulta ser una instancia paradigmática u objeto canónico. La canonicidad de un objeto matemático –por ejemplo una curva, un triángulo, etc- no está dada de antemano sino que surge en el mismo proceso de investigación de algún problema. Aquí no se generaliza a partir de la instancia paradigmática sino que 'generalizar' –que es ajeno a la abstracción- es tratar de encontrar la generalidad misma en el propio caso canónico particular; es una forma de pensar basada en una semántica intensional que apunta a encontrar una estructura, un patrón o

[10] Una relación es de Equivalencia cuando es simultáneamente reflexiva, simétrica y transitiva. Esta relación genera clases mutuamente excluyentes y exhaustivas entre sus elementos, lo que la hace recomendable para ser utilizada en las definiciones por abstracción.

[11] M.A. y J.C. Colaccilli de Muro, *Elementos de Lógica Moderna y Filosofía*. Buenos Aires, 1980, Ed. Estrada, pág. 237.

una idea que permite mirar otros casos buscando la similaridad estructural entre ellos, dando lugar a innovaciones sugeridas por las propiedades individuales del caso.

Un ejemplo histórico interesante es el descubrimiento de la curva catenaria logrado a partir de un problema planteado durante el S. XVII. La pregunta sobre qué forma adoptaría una cadena o cuerda flexible sostenida en sus dos extremos y sometida a un campo gravitatorio uniforme, llevó al estudio y posterior descubrimiento de sus cualidades estructurales y a la constatación de que no se trataba de una sola curva sino de una familia de curvas –y descartar, a su vez, la igualdad con la parábola-. La generalidad aquí está dada por lo siguiente: se parte de las propiedades de un caso, reconocido o devenido en canónico, y se genera la búsqueda de otros casos particulares que también cumplan con ese patrón o pauta general.

En esta búsqueda e indagación de un problema, el lenguaje formal homogéneo muestra sus limitaciones expresivas. La metodología analítica presupone que la naturaleza es híbrida, por lo tanto para comprender un objeto o resolver un problema es necesario desarrollar una notación que pueda capturar y expresar de manera conjunta las formas diferentes de esa naturaleza. Es decir, la idea es conectar los distintos planos en que puede abordarse un problema híbrido, heterogéneo; conectar, por ejemplo, el plano aritmético, el geométrico, el mecánico, el algebraico, etc., dando lugar a una combinación de distintos modos de representación.

En esa condición híbrida del problema radica la característica más importante del análisis como método. E. Grosholz[12], analiza el estudio de la catenaria por parte de Leibniz y muestra cómo el autor entiende el análisis como la búsqueda de las condiciones de inteligibilidad de un problema y las condiciones de resolución del mismo. Y esas condiciones de inteligibilidad son aquéllas condiciones mecánicas, aritméticas, geométricas, etc. Es decir, es una búsqueda que involucra la combinación de las diferentes maneras de representación que pueden incluir figuras y descripciones, razonamiento hacia arriba y hacia abajo, y el conocimiento histórico de cada caso.

En síntesis, la generalidad está ligada a las instancias particulares de manera diferente en cada uno de los dos modos que nos concierne: el enfoque axiomático de la lógica formal la entiende como abstracción susceptible de reglamentar los objetos de un ámbito de aplicabilidad previamente definido. Aquí no se indaga sobre las particularidades de los individuos y sus propiedades y por ello su punto de vista es extensional. En cambio, la investigación de orientación analítica encuentra la generalidad en un caso individual considerado como paradigmático y de allí analiza otros casos particulares buscando una similaridad estructural entre esos objetos. Las propiedades de estos objetos adquieren relevancia tanto como el conocimiento histórico de cada caso, ya que este conocimiento orienta sobre cuáles propiedades se puede profundizar en la investigación. Es decir que se adopta un punto de vista intensional.

Las reglas:

En la actualidad hablar de regla en lógica es casi exclusivamente hablar de regla deductiva, es decir, de un esquema válido donde el salto lógico desde las premisas a la conclusión tenga el carácter de necesario. La regla instruye acciones a seguir, y, por defecto, también lo que prohíbe realizar. Así por ejemplo, las reglas del sistema de deducción natural -como el de G. Gentzen de 1934- establecen que dadas ciertas combinaciones de signos sólo son posibles obtener otras combinaciones determinadas. Una característica de estas reglas es su generalidad en el sentido de abstracción anteriormente mencionado.

En los cálculos deductivos el empleo de las reglas en las demostraciones se lleva a cabo de manera mecánica. Esto significa que sus instrucciones se aplican de modo determinista, es decir, sin intervención

[12] Emily Grosholz, "Leibnizian Analysis, Canonical Objects, and Generalization" in *Handbook on Generality*, ed. Karine Chemla, 2016, David Rabouin, and Renaud Chorley. Oxford University Press.

de la reflexión o pensamiento alguno. Y la carencia de esta cualidad en las reglas no deductivas -lo mecánico- es una de las razones por las cuales se ha denegado su pertinencia en el proceso científico; en éste las hipótesis no pueden ser inferidas mecánicamente, por lo tanto la metodología de la investigación no puede interesarse por el contexto de descubrimiento, más propio del ámbito de la psicología que de la lógica, según el enfoque que he llamado axiomático.

Hay claramente dos puntos de vistas en tensión respecto de si la metodología de la ciencia debe interesarse por los procesos reales de búsqueda y descubrimiento de nuevos conocimientos o, por el contrario, sólo debe interesarse por la validación de los resultados ya hallados. Las reglas deductivas, mecánicas, pertenecen a este último enfoque; las nodeductivas, propias de la metodología analítica, en cambio, se destacan como orientadoras de nuevos caminos que impliquen la solución de los problemas que los científicos se plantean. Esta tarea orientadora es flexible y no mecánica pero es importante señalar que esto no implica que esté exenta de rigor, es decir, que ellas logran establecer instrucciones específicas cuya cuidadosa observación genera resultados confiables y concretos en la investigación –además de dar cuenta de lo acontece en la práctica real.

Se puede, lícitamente, hacer varias preguntas con respecto a las reglas y su rol en la investigación, por ejemplo: ¿Es necesario que una regla lógica sea mecánica?, ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de lo mecánico?, ¿Qué otras reglas hay propuestas?, ¿Es posible ampliar el punto de vista e incluir reglas nodeductivas?, ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de las reglas nodeductivas?. L. Wittgenstein, en las *Investigaciones Filosóficas,* reflexiona sobre las reglas y ofrece imágenes muy agudas en sus aforismos que permiten vislumbrar respuestas a estas inquietudes, que ayudan a comprender más cabalmente su significado y pensar acerca del grado de flexibilidad presente en las mismas como uno de los criterios para comparar los dos modelos. Esto nos lleva, asimismo, a considerar como muy relevante el carácter constitutivo y formativo que ejercen las reglas, además del puramente regulativo, habida cuenta que el punto de vista del autor vienés está anclado en las prácticas concretas de las formas de vida y de la esfera de los juegos del lenguaje en contextos naturales.

En el aforismo 85 del citado texto, Wittgenstein introduce el carácter flexible en las reglas asumiendo la variedad de inferencias, las no necesarias –que dejan una duda- y las necesarias –que no dejan dudas:

> § 85. "Una regla está ahí como un indicador de caminos".-¿No deja este ninguna duda abierta sobre el camino que debo tomar? … Deja a veces una duda abierta y otras veces no[13].

Pero aceptar el carácter flexible genera una fuerte confrontación con aquel ideal de un lenguaje perfecto, puro, libre de vaguedad y ambigüedad. Sin embargo ¿cuál es el precio que se paga por un tal lenguaje? Es decir ¿estamos dispuestos a renunciar a las ventajas de un lenguaje y unas reglas que dejen abierta la duda?

Los siguientes aforismos son ilustrativos de estas reflexiones:

> § 100. "Pero no es un juego si hay vaguedad *en las reglas*".- ¿Pero no es un juego?- "Sí quizás quieras llamarlo juego, pero en cualquier caso no es un juego perfecto" Es decir: está contaminado y yo me intereso por lo que está limpio.-Pero quiero decir: Malentendemos el papel que juega el ideal en nuestro modo de expresión. Es decir lo llamaríamos también un juego, sólo que estamos cegados por el ideal y no vemos por ello claramente la aplicación de la palabra "juego"[14].
>
> § 103. El ideal, tal como lo pensamos, está inamoviblemente fijo. No puedes salir fuera de él: Siempre tienes que volver. No hay ningún afuera, afuera falta el aire[15].
>
> § 107. Cuanto más de cerca examinamos el lenguaje efectivo, más grande se vuelve el conflicto entre él y nuestra exigencia. (La pureza cristalina de la lógica no me era *dada como resultado*; sino

[13] Ludwig Wittgenstein, *Investigaciones Filosóficas,* 2004, Barcelona, Editorial Crítica, pág. 105.
[14] Ídem, pág. 119.
[15] Ibíd.

como una exigencia). El conflicto se vuelve insoportable, la exigencia amenaza ahora convertirse en algo vacío. –Vamos a parar a terreno helado en donde falta fricción y así las condiciones son en cierto sentido ideales, pero también por eso mismo no podemos avanzar. Queremos avanzar; por ello necesitamos la fricción. ¡Vuelta a terreno áspero![16].

§ 108. […] ¿Pero en qué se convierte ahora la lógica? Su rigor parece deshacerse.- Pero no desaparece enteramente por eso.- Pues cómo puede la lógica perder su vigor? Naturalmente no porque se le rebaje algo de su vigor.- El *prejuicio* de la pureza cristalina sólo puede apartarse dándole la vuelta a todo nuestro examen. […][17].

Se puede decir que la lógica no se convierte en nada diferente de lo que es, es decir, sigue siendo una teoría acerca de la inferencia válida, acerca de la noción de consecuencia lógica. Lo que sí cambia es su punto de vista, ya que éste se amplía, se flexibiliza, al abandonar los cánones estrictos de la exigencia impuesta por el ideal del lenguaje perfecto y la inferencia necesaria. Darle la vuelta a nuestro examen implica superar el prejuicio de que lo no-necesario no implica que sea no-puro.

La ventaja de esta 'vuelta' conecta la investigación con la creatividad en la búsqueda de resolución de los problemas científicos; aprender las reglas es también aprender a indagar y formar hábitos rigurosos en la indagación racional. De allí el reclamo de Lakatos de la formación ligada a la educación, de proyectar una enseñanza donde se recupere las experiencias de las teoría en los momentos de su desarrollo.

Recordemos lo expresado al comienzo, si la lógica debiera estar unida a la metodología, las instrucciones que en sus reglas se plantean implican también un modo de hacer investigación, es decir, un modo de construir conocimiento y por lo tanto no sólo sirve a los fines de la justificación sino que también la lógica tiene un lugar interesante en los procesos de adquisición del conocimiento. Este rol está en el descubrimiento, la invención, la búsqueda o la construcción del conocimiento. Las acciones que la flexibilidad de la reglas nodeductivas permiten están directamente ligadas al desarrollo de la creatividad, a la búsqueda de lo nuevo frente al desafío de comprensión de los problemas científicos.

Consideraciones finales:

Cada uno de los modelos sobre cómo investigar en Ciencias Formales ha sido presentado aquí como dos culturas contrapuestas, destacando algunas de sus diferencias metodológicas más irreductibles que se manifiestan claramente en las reglas lógicas con que cada enfoque está comprometido.

El enfoque axiomático comprende la lógica y la matemática como abstracción formal, deductivista; representa al conocimiento como un saber puro, no contaminado por la incertidumbre. Al ofrecer una imagen infalible e irrefutable de un saber y de una actividad más neutral y aséptica –generada en parte por la búsqueda de abstracción y de un lenguaje ideal perfecto-, da una imagen dogmática de la propia ciencia y de las actividades implicadas en la obtención del conocimiento. Las certezas se demuestran mediante pruebas formales muy rígidas. En este sentido es atinente pensar que una educación científica basada en estas prácticas tan rigurosas genera un sujeto con escasa ejercitación y tolerancia para incorporar la duda, la crítica o lo contingente, conminando los saberes no demostrados estrictamente por mecanismos necesarios a permanecer relegados a una esfera de dudosa confiabilidad.

La metodología analítica se presenta, en cambio, como una actividad más flexible. Al establecer una relación abierta y de índole dialéctica con el problema, acepta la incertidumbre como fuente fecunda generadora de hipótesis. Su dinámica, más ligada a la metodología de la prueba y el error que genera una continua corrección y modificación del conocimiento, se muestra en el tipo de reglas de inferencia

[16] Ídem, pág 121.
[17] Ídem, págs. 121-122.

contingente que son más representativas de la actividad de búsqueda en la investigación. La actitud de tolerancia hacia el saber y hacia los otros se ve incentivada por estas prácticas.

La explicitación de las diferencias y características de ambos modelos es muy importante porque cada uno de manera implícita adhiere a ciertos valores y concepciones de mundo que implican también un modelo de educación, una concepción epistemológica y un compromiso político, y por lo tanto la formación de un determinado tipo de sujeto; el sujeto que investiga es también el sujeto que aprende y el que se relaciona con el mundo. Por ello, qué sujeto queremos dependerá también de qué reglas lógicas aceptemos como genuinamente válidas y de la concepción de investigación que tengamos; y de aquí que la educación se vuelve un asunto central si aceptamos, al menos en líneas generales, el parecer de Lakatos, quien ha pronunciado una fuerte crítica a la abstracción axiomática formal de la escuela formalista al decir: "El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas de un teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada"[18].

Y en la nota a pie de página de esta cita, el autor hace una de las afirmaciones más comprometidas y críticas: "Aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un *semillero de autoritarismo*, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente"[19] (las cursivas son mías).

Por otra parte, las reflexiones de Wittgenstein -quien dejó como legado el principio de tolerancia tan fundamental en las ciencias sociales-, nos señalan la proximidad entre las reglas de la lógica y el mundo de la praxis real, nos enseñan que la exigencia autoimpuesta de un ideal rígido –inamoviblemente fijo- también nos inmoviliza, es decir, nos aleja de la comprensión cabal de los problemas, donde para avanzar es necesaria la fricción, el movimiento.

Ante estas observaciones críticas se advierte la necesidad de un paradigma o modelo más inclusivo, donde la lógica juegue un rol significativo en la investigación científica; me refiero aquí a una lógica que trate con una noción de inferencia que se interese también por los procesos de adquisición del conocimiento (*ars inveniendi*), y no sólo aquella que emplea reglas deductivas de inferencia necesaria, ya que la demostración no es la única finalidad de la ciencia y no sólo la inferencia deductiva es rigurosa; la flexibilidad también puede ser manejada rigurosamente.

Según sostiene E. Grosholz[20], hay vastas áreas de la matemática que no pueden ser reformuladas en términos de las teorías axiomáticas y sí todas ellas pueden ser interpretadas en términos analíticos; entonces parecería que el modelo analítico es más inclusivo y que el método axiomático trabaja dentro de los parámetros de aquél. Esto implicaría que no es necesario decidirse por uno de ellos con exclusión del otro sino más bien que puede hablarse de una convivencia de los modelos, tal como muestra la práctica real de los matemáticos donde ambos enfoques parecen combinarse.

E. Morin, el filósofo francés del paradigma de la complejidad plantea una idea análoga -desde una formación filosófica diferente a la de los autores mencionados- al proponer como desafío la reforma del pensamiento en y por la reforma de la enseñanza, que consiste principalmente en tender puentes, en generar alianzas entre puntos de vista diferentes. La cuestión de la elección de los modelos, desde esta mirada, no podrá resolverse por uno o por otro, ya que el compromiso teórico es religar lo que ha sido separado, comprender que el mundo es un tejido complejo, del vocablo *complexus* que significa "lo que está tejido junto", y que los diversos modos de pensamiento deben integrarse en un concepto de racionalidad más

[18] Imre Lakatos, Op. cit, pág.166.
[19] Íbid.
[20] Emily Grosholz, *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences.* New York, 2007, Oxford University Press Inc.

amplio que incluya en su seno formas aparentemente excluyentes entre sí pero esencialmente interdependientes[21].

Recibido: 9 de septiembre de 2017
Aceptado: 15 de septiembre de 2017

[21] Edgar Morin, *Introducción al pensamiento complejo*, Barcelona, 2008, Gedisa Editorial.