Revista semestral de filosofía

El hilo de la fábula

Consideraciones sobre el teorema de incompletud de Gödel y su relación con la computabilidad y el mecanicismo

Aldana D'Andrea
Universidad Nacional de Río Cuarto

Introducción

En 1931 Gödel publica su artículo *On formally Undecidable propositions of Principia Mathematica and Related System,* en él presenta el teorema de incompletud, el cual establece que cualquier sistema formal consistente *P*[1], en el cual pueda desarrollarse una cierta cantidad de aritmética elemental[2], es incompleto, dado que puede construirse una fórmula en el lenguaje del sistema *P* tal que ni ella ni su negación sean teoremas de *P*. Como corolario de este teorema, se obtiene un segundo resultado relativo a la imposibilidad de demostrar la consistencia del sistema *P* en *P* mismo. Nosotras nos centramos de manera exclusiva en el primero de estos teoremas, de manera que al referir al *teorema de Gödel* hacemos alusión únicamente al resultado de incompletud.

Actualmente es claro que la incompletud de cierta clase de sistemas formales es uno de los resultados más importantes de la lógica y la matemática moderna, aún así permanecen ciertas disputas en torno a su significancia y consecuencias. Hay una idea ampliamente difundida según la cual el teorema de Gödel es un resultado negativo o un teorema limitativo, en el sentido que señala los límites del método formal y con ello pone fin a los programas formalistas, en particular al de Hilbert. Al respecto Judson Webb ha señalado que la idea según la cual el teorema de Gödel muestra una limitación esencial en el método axiomático en matemáticas discrepa con el hecho histórico que evidencia que este método ha avanzado notablemente desde 1931[3]. Si bien es cierto que el teorema de incompletud establece ciertos límites en el concepto de demostración formal, al mismo tiempo debemos señalar que lo que llamamos *límite* es también una profundización en el conocimiento del vasto campo de la metamatemática y sus métodos finitistas, y esto se debe fundamentalmente a que Gödel adscribió a las ideas propuestas por la escuela de Hilbert y arribó a su teorema en un intento de contribuir al programa de Hilbert y no de objetarlo.

Este trabajo se inscribe en la idea de que el teorema de Gödel, lejos de ser un resultado negativo o limitativo, ha favorecido el desarrollo de la metamatemática y las ciencias formales, en particular, el de la teoría de la computabilidad, y por ello mismo puede ser mejor considerado como un resultado ampliativo y positivo con implicancias teóricas específicas y peculiares. Para explorar el alcance de esta idea proponemos analizar dos tesis que Webb desarrolla fundamentalmente en *Mechanism, mentalism, and metamathematics.* En primer lugar consideramos la siguiente tesis de Webb:

---

[1] La formulación original de Gödel exige que el formalismo sea ω-consistente, gracias a una un resultado posterior de Rosser, en la mayoría de las formulaciones actuales basta con la exigencia de consistencia.
[2] Basta con asumir que en el sistema pueden desarrollarse la aritmética recursiva primitiva o, al menos, una aritmética que contenga axiomas para las operaciones de suma, multiplicación y sucesor.
[3] Judson Webb, *Mechanism, mentalism, and metamathematics,* Dordrecht, 1980, D. Reidel Publishing Company, p. 200.

(A) "The undecidible sentences are nothing but guardian angels of computability theory"[4].

Proponemos examinar en qué sentido preciso puede sostenerse esta tesis, para ello planteamos que la relevancia del teorema de incompletud abarca, al menos, tres aspectos esenciales en relación con la computabilidad: los aportes metodológicos fundados en la noción intuitiva de efectividad, el resultado teórico de incompletud y las inquietudes conceptuales que el teorema dejó planteadas sobre las nociones de sistema formal y recursividad.

La tesis (A) de Webb implica a una segunda tesis relativa al mecanicismo:

(i) "Gödel discovered a kind of invisible protective shield encasing the foundation for modern mechanism"[5].

Webb entiende que el mecanicismo moderno está fundado, ya no en modelos de máquinas particulares, sino en el concepto más general y abstracto de máquina universal de Turing, por esta razón los fundamentos del nuevo mecanicismo se encuentran en la teoría de la computabilidad. De acuerdo a ello proponemos esbozar algunos de los argumentos anti-mecanicistas clásicos que sostienen que el teorema de Gödel refuta al mecanicismo y ponerlos en discusión con los argumentos desarrollados en el análisis de (A).

1. *Las sentencias indecidibles son los ángeles guardianes de la teoría de la computabilidad*

1.1. Los aportes metodológicos

Para demostrar su teorema de incompletud Gödel se valió de una serie de procedimientos que han resultado fundamentales para el desarrollo de la lógica-matemática en general y de la computabilidad en particular. Uno de los procedimientos principales es la aritmetización o codificación de su sistema formal P.

Gödel aritmetiza la sintaxis de su sistema de manera tal que a cada símbolo del lenguaje, a cada secuencia finita de símbolos (fórmulas) y a cada secuencia finita de fórmulas le corresponda un código numérico. Esto hace posible que las nociones sintácticas como constante, variable, fórmula, etc., sean definidas en el lenguaje de la aritmética, y lo mismo sucede con las operaciones sobre (los números de Gödel de) las fórmulas, esto es, operaciones como la negación o la implicación pueden ser definidos en términos numéricos. Aún más, la codificación abarca también propiedades y relaciones metateóricas fundamentales como "ser (el número de Gödel de) un axioma", "ser (el número de Gödel de) una deducción", "ser (el número de Gödel de) una fórmula deducible". De esta manera todas las propiedades y relaciones sintácticas son representadas en la aritmética, esto es, la matemática y la metamatemática del sistema *P* son formalmente expresables en el mismo lenguaje de *P; P* referirá a sus objetos y relaciones formales pero de manera indirecta, a través de números. Gödel logra así que la metamatemática se convierte en una rama de la teoría de números[6].

La característica decisiva de la aritmetización de Gödel es que las correspondencias entre las propiedades y relaciones de los elementos formales del sistema y las propiedades y relaciones de números enteros, obedecen a un mapeo que debe ser efectivo. Esto es así porque en la medida en que la correspondencia sea efectiva habrá una decodificación unívoca de las fórmulas y series aritméticas con sus propiedades y relaciones, pero, además, deja planteada una inquietud que se destacará en las discusiones sobre fundamentos de las matemáticas de aquellos años, a saber, la pregunta sobre cuáles de estos predicados y relaciones aritméticos a los que refieren las fórmulas son susceptibles de ser decidibles por un

[4] Idem, p. 202.
[5] Idem, p. 9.
[6] Stephen Kleene, *Introduction to metamathematics*. Amsterdam, 1971, North-Holland Publishing Company, p. 246.

cálculo finitista[7] Para asegurar esta condición crítica relativa a la efectividad del mapeo en la aritmetización Gödel optó por la noción de recursividad y la identificación –al menos intuitiva- de ésta con la noción de cálculo efectivo[8]. Si bien ya Grassman (1861), Pierce (1881), Dedekind (1888), Skolem(1923), Hilbert (1926) y Ackermann (1928) habían realizado importantes investigaciones previas en relación con funciones recursivas, Gödel es el primero en dar una definición explícita de lo que una función recursiva primitiva es[9]: "A number-theoretic function ϕ is said to be recursive if there is a finite sequence of number-theoretic functions ϕ_1, ϕ_2, ...; ϕ_n that ends with ϕ and has the property that every function ϕ_k of the sequence is recursively defined in terms of two of the preceding functions, or results from any of the preceding functions by substitution, or, finally, is a constant or the successor function x + 1"[10].

Gödel define también por primera vez el concepto de relación recursiva primitiva y demuestra 4 teoremas referidos a propiedades de clausura de esta clase de funciones. En base a estas definiciones y resultados, Gödel establece que algunas de las propiedades y relaciones sintácticas más relevantes –como las de ser una prueba, por ejemplo- pueden ser representadas por relaciones primitivas recursivas y ofrece una lista de 45 funciones características que las determinan. La definición de estas funciones es fundamental, puesto que ellas aportan un modo efectivo para decidir si ciertos objetos del sistema identificados con sus respectivos códigos poseen o no aquellas propiedades o si están o no en aquellas relaciones. Gracias a esta representación en términos de funciones y relaciones recursivas algunas de las sentencias metamatemáticas más relevantes podrían ser verificadas -de acuerdo a las prescripciones finitistas de Hilbert- en un número finito de pasos, esto es, el conjunto de números de Gödel que las representan será recursivo o decidible.

La lista que ofrece Gödel de funciones que representan propiedades y relaciones sintácticas tiene, en rigor, 46 definiciones, las 45 primeras satisfacen la propiedad de ser recursivas primitivas y por ello son decidibles, pero la definición 46, la correspondiente al predicado de ser una fórmula demostrable en el sistema, *Bew* (*x*), "is the only one of the notions 1-46 of which we cannot assert that is recursive [primitive]"[11]. Por supuesto, esto es fundamental para el teorema de incompletud, puesto que si el predicado *Beweisbare (*demostrable) determinara un conjunto recursivo ello significaría que la función que representa el predicado aportaría un modo efectivo de determinar si cualquier fórmula expresable en el lenguaje del sistema P es o no teorema; este resultado evitaría la indecidibilidad deductiva de la fórmula *G* de Gödel y, al mismo tiempo, daría un resultado positivo al *Entscheidungsproblem*. En esencia, la afirmación de que la fórmula característica del predicado *Beweisbare* no sea recursiva primitiva es la afirmación, a la luz de la tesis de Church-Turing, de que el conjunto que ella determina no es efectivamente decidible. Claramente, estas consideraciones estuvieron sujetas al alcance de la noción de sistema formal empleada por Gödel y, por ende, al alcance de su noción de recursividad; el esclarecimiento de tales cuestiones se dio a partir de la generalización del teorema de incompletud y ello fue una consecuencia -tal como señaló

[7] Para la escuela de Hilbert la exigencia de un cálculo finitista es la exigencia metodológica de la matemática rigurosa. Esta noción puede ser identificada con la de cálculo efectivo, aunque es de notar que Hilbert no empleó este término; de acuerdo a una observación de Gandy la expresión *cálculo efectivo* fue empleada por primera vez por Herbrand en 1931. Véase Robin Gandy "*TheConfluence of Ideas in 1936"* en Rolf Herken (ed.), *A half-century survey on The Universal Turing Machine*, New York, 1988, Oxford Univesity Press, pp. 55-11.

[8]Lo que llamamos *condición crítica* era en el año 1931 sólo un interrogante o, más bien, una apuesta sobre la pregunta acerca de qué son los procedimientos efectivos. La identificación del concepto de efectividad con el de recursividad, era, como apunta Webb, un postulado intuitivo de Hilbert que intentaba definir un concepto intuitivo en términos de otro concepto intuitivo (Judson Webb, op. cit. p. 188). Por lo tanto, cualquier referencia a la efectividad de los métodos en el teorema de Gödel debe entenderse en este marco, como una apuesta al programa metamatemático de Hilbert y un intento por clarificar la conexión entre las nociones de función recursiva y función efectivamente computable.

[9] Gödel introduce la primera definición formal de la clase de funciones que actualmente conocemos como "recursivas primitivas", en el artículo de 1931 Gödel las llamó simplemente "rekursiv", el nombre actual se debe a Péter (1934) y a Kleene (1936). Véase Road Adams, . *An early history of recursive functions and computability from Gödel to Turing*, Boston, 2011, Docent Press, p. 105.

[10] Kurt Gödel, "*On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I (1931)"* en *Kurt Gödel: Collected Works*, New York, 1986, Oxford University Press, p. 159.

[11] Idem, p. 171.

el mismo Gödel en el *post scriptum* de 1963- del trabajo de Turing[12] que aportó "a precise and unquestionably adequate definition of general notion of formal system"[13].

Volveremos más adelante sobre estas apreciaciones conceptuales, lo que ahora nos interesa es notar la relevancia y particularidad del procedimiento de aritmetización de Gödel en las discusiones metamatemáticas de aquel momento, puesto que este tipo particular de codificación trae consigo una consecuencia que resultó muy interesante, e incluso beneficiosa, para el programa metamatemático de la escuela de Hilbert, a saber, la completud experimental y expresiva de la aritmética finitista: todas las funciones primitivas recursivas son formalmente calculables en el sistema P y todos los predicados recursivos primitivos son representables en la aritmética formal del sistema. Webb enfatiza el hecho de que para Hilbert la completud experimental de sus formalismos aritméticos, y no la completud deductiva, es la característica primordial para su programa metamatemático: "Gödel finally made it posible to establish the experimental completeness of Hilbert´s formal arithmetic"[14]. Quizá podamos considerar, entonces, que una de las claves para sostener la idea de que el teorema de incompletud es un resultado propicio para el desarrollo la teoría de la computabilidad es que Gödel desarrolla su técnica de aritmetización en base a los cánones metodológicos de la matemática finitista de Hilbert y ello lo vincula, necesariamente, a un esclarecimiento de la noción de sistema formal y cálculo efectivo.

De acuerdo a Webb las dos construcciones decisivas del éxito de la aritmetización de Gödel son la formalización al interior del sistema de la noción de demostrabilidad y de la operación de sustitución[15]. La formalización del concepto de demostrabilidad está dada, en lo esencial, en la construcción del predicado recursivo primitivo *Beweise,* $B(x,y)$, el cual formaliza la noción "x es (el número de Gödel de) una prueba de la fórmula con número de Gödel y" y la construcción del predicado *Beweisbare,* $Bew(y)$, que formaliza la noción "y es demostrable". $Bew(y)$ es equivalente a la fórmula $\exists x B(x,y)$[16] . La formalización de la sustitución, por su parte, se da mediante la construcción al interior del sistema de una función de sustitución recursiva primitiva $subst(x,y)$, la cual designa la fórmula que resulta de sustituir cada aparición de la variable libre x por el numeral y en una fórmula dada.

La aritmetización recursiva de la metamatemática y sus productos, en especial la formalización del concepto de demostrabilidad y de la operación de sustitución, representan, en sí mismos, significativos y fructíferos desarrollos metodológicos, pero al mismo tiempo constituyen, en conjunto, la condición de posibilidad para lo que podríamos considerar junto a Webb como el aporte decisivo para la teoría de la computabilidad -y también para el mecanicismo-, esto es, la completa aritmetización y formalización del proceso de diagonalización[17]. Gödel mostró cómo construir un punto fijo para el predicado metamatemático "no-demostrable", para ello utilizó la diagonalización de su función de sustitución $subst(y,y)$ para construir formalmente su predicado $B(x,subst(y,y))$. La formalización de la fórmula $\forall x \neg B(x,subst(y,y))$ expresa que la fórmula $subst(y,y)$ no es demostrable, pero si la fórmula $\forall x \neg B(x, subst(y,y))$ tiene el número de Gödel b, el argumento diagonal muestra que si el sistema P es consistente, entonces la fórmula diagonalizada$\forall x \neg B(x, subst(\ulcorner b \urcorner, \ulcorner b \urcorner)$ debe ser indecidible en P. Gödel mostró así cómo puede construirse dentro del sistema una fórmula autorreferencial tal que su significado intuitivo -gracias a la correspondencia entre aritmética y metamatemática- sea *yo soy indemostrable*:

$P \vdash G \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner G \urcorner)$

---

[12] Alan Turing, "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem (1936)" en Martin Davis, *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions.* New York, 1965, Raven Press, pp. 115 – 151.

[13] Kurt Gödel, op. cit. p. 195.

[14] Judson Webb, op. cit. p. 191.

[15] Idem p. 192.

[16] Kurt Gödel, op. cit. p. 171.

[17] Judson Webb, op. cit. p. 192.

Como el mismo Gödel señala, esta fórmula recuerda a la paradoja del mentiroso en la forma de Eubulides: "Esta sentencia no es verdadera", pero en tanto que ésta expresa una antinomia debido a la imposibilidad de la formalización de la noción de verdad al interior del sistema[18], en la sentencia autorrefefrencial de Gödel el concepto de verdad es reemplazado por el de demostrabilidad, un concepto que posee gracias a los métodos introducidos por Gödel, la facultad de evitar la antinomia y ser él mismo la fuente de la incompletud de la teoría formal de números.

Antes que Gödel, Finsler había obtenido en 1926 un resultado similar, esto es, mediante diagonalización había demostrado la existencia de proposiciones indecidibles; sin embargo, el concepto de demostración de ambos es sustancialmente diferente, en tanto que Gödel coloca en el centro de su argumentación una noción finitista de sistema formal, Finsler apela a la limitación de lo formal y su prueba descansa finalmente en lo que él llama el *reino de lo conceptual*. Finsler establece que en cada sistema formal existe, en el reino de lo conceptual, una proposición que puede ser representada pero no demostrada; esto debe ser así porque cada sistema formal puede producir sólo una cantidad enumerable de demostraciones formales, mientras que hay una cantidad no-enumerable de proposiciones verdaderas[19].

La diferencia profunda en la noción de demostrabilidad formal entre Gödel y Finsler nos permite observar en qué sentido la propuesta de Gödel sienta las bases para un nuevo uso práctico y nuevas implicancias teóricas del método diagonal[20]. El resultado de Gödel está regido por el punto de vista finitista y ello condujo a los esfuerzos por emplear métodos efectivos; esto no sólo importa por la rigurosidad que aporta a los resultados, sino también porque permite plantear –a la luz de la tesis de Church-Turing- la mecanización del método diagonal. Desde esta perspectiva, el teorema de Gödel es fundamental en la elucidación de la noción de función efectivamente computable y ello se debe, en lo fundamental, a la vinculación metodológica de este teorema con el programa metamatemático de Hilbert: "(...) a theory of effectiveness has to be metmathematical in the sense that we will have to consider, via enumerations, the action of our functions on the algorithms of other functions. In particular, we see that such a theory must involve far more than the kind of 'arithmetization' of mathematics envisaged by Kronecker: it will require the explicit arithmetization of the very intuitive processes of enumeration and substitution (...) that early writers took for granted. In short, arithmetization in the sense of Gödel"[21].

La aritmetización tal y como la plantea Gödel, o sea, la representabilidad de los conceptos metamatemáticos en términos de funciones recursivas, dio lugar a un tratamiento finitista de cuestiones que tradicionalmente habían permanecido en el ámbito filosófico-epistemológico, si bien Hilbert ya había pronunciado el interés de que la metamatemática fuera un estudio matemático en sí mismo, fue recién con la aritmetización de Gödel que la metamatemática llegó a ser, como apunta Kleene, una parte de la teoría de números.[22] Gödel optó por métodos efectivos para establecer el alcance de lo que puede ser

[18] Gödel había arribado a la conclusión de que la noción de verdad es formalmente indefinible, incluso para teoría de números. Murawsky discute la prioridad histórica de este resultado en relación con el teorema de la indefinibilidad de la verdad de Tarsky, publicado en 1933. Véase Roman Murawsky, "Undefinability of Truth. The problem of Priority: Tarsky vs. Gödel" en *History and phylosophy of Logic. Vol 19, no.3. pp. 153-160.*

[19] Paul Finsler, "Formal proofs and Undecidability (1926)" en Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Cambridge, 1967, Harvard University Press. Pp.438 – 445 Jean,:, 1967. El resultado de Finsler fue interpretado por muchos, como estableciendo la imposibilidad de representar el pensamiento matemático en los sistemas formales. Existen interpretaciones actuales del teorema de incompletud de Gödel que señalan ideas semejantes. Véase, por ejemplo, Ernest Nagel y James Newman, *Gödel´s proof,* New York, 1958, New York University Press.

[20] Al respecto del método diagonal, Kreisel observa que Gödel planteó en su artículo de 1931 una redefinición del argumento diagonal tal y como lo había utilizado Cantor: de ser un método que prueba no-enumerabilidad a ser un método que construye efectivamente proposiciones indecidibles. Véase Kreisel Georg. "Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus." en *Fundamenta Mathematicae* , Vol. 37, no. 1, 1950, Pp. 265-285.

[21]Judson Webb, op. cit. p. 181.

[22]La aritmetización de Gödel permite referir a los índices de los objetos en la enumeración en vez de a los objetos mismos, y si ignorásemos las interpretaciones de los objetos del sistema, el teorema de incompletud sería una proposición sobre teoría de números elemental. Stephen Kleene, *Introduction to metamathematics*., Amsterdam, 1971, North-Holland Publishing Company, p. 206.

formalizado en metamatemática y esto habilitó a que sus técnicas fueran favorecedoras de un estudio profundo acerca de qué se puede establecer en base a métodos efectivos. Más específicamente, la formalización de la diagonalización tal y como la plantea el trabajo de Gödel justifica la consideración de Rogers según la cual la teoría de la computabilidad es, en gran parte, una teoría de la diagonalización[23].

1.2 El resultado teórico

El resultado teórico fundamental del teorema de Gödel es la incompletud deductiva de la teoría formal de números. Revisemos en qué sentido este resultado *limitativo* protege los resultados fundamentales de la teoría de la computabilidad y se convierte así en un resultado *ampliativo*.

Gödel parte de una cierta teoría de sistema formal que está modelada por el punto de vista finititista de Hilbert, dado que la formalización convierte a la deducción en una cadena finita de signos, la prueba puede ser estudiada como un objeto matemático finito, a la manera que se estudia la aritmética elemental. Si la prueba formal es un objeto sujeto a tales condiciones de finitud, entonces sobre ella pueden establecerse ciertas restricciones de recursividad –recordemos la tesis de Hilbert que identifica las nociones de finitismo y recursividad-, en particular puede exigirse que el sistema formal esté acotado por las siguientes condiciones (estas condiciones han sido generalizadas para los nuevos resultados de teoría de la recursión y definen, bajo la tesis de Church-Turing lo que es un sistema formal):

1. El conjunto de fórmulas bien formadas es recursivo primitivo
2. El conjunto de axiomas es recursivo primitivo
3. Las reglas de inferencias son operaciones recursivas primitivas.

Como consecuencia de estas condiciones iniciales y mediando la aritmetización, Gödel logra afirmar, como ya indicamos anteriormente, la recursividad primitiva del conjunto de (números de Gödel de) pruebas. Tanto las condiciones iniciales como este corolario han sido decisivos para el establecimiento y resguardo de la tesis de Church-Turing, puesto que en la actualidad podemos especificar en base a ellos un importante resultado: si el sistema es completo entonces es decidible[24].

Que un sistema formal P sea decidible significa que el conjunto de teoremas debe ser recursivo; que el sistema sea completo significa que para cada sentencia A, al menos A o $\neg A$ son teoremas de P. Si el sistema formal para teoría de números fuera completo, o sea, si la existencia de las fórmulas indecidibles para P no fuera formalmente demostrable, entonces:

- O bien resulta que el sistema P es inconsistente, con lo cual toda fórmula es un teorema y, dado que el conjunto de fórmulas es recursivo, el conjunto de (números de Gödel de) teoremas de P también lo es. Por lo tanto, P es decidible.
- O bien resulta que el sistema P es consistente y, por completud, es necesario que sea teorema o bien A o bien $\neg A$. Luego, dadas las condiciones de recursividad planteadas para el sistema, es posible generar todos los teoremas de P -aplicando por ejemplo el algoritmo del Museo Británico- hasta que se dé con A o su negación. Por lo tanto, P es decidible.

Concluimos que un sistema formal completo es siempre decidible[25], aunque la conversa no se aplica, esto es, no siempre un sistema incompleto es indecidible, con lo cual con sólo el resultado de incompletud no podemos garantizar la solución negativa del *Entscheidungsproblem*, pero sí sentar las bases para plantear su posibilidad. De hecho, Raatikainen apunta que incompletud e indecidibilidad *van de la mano* para una amplia clase de teorías, específicamente, comenta que aquellas teorías con un mínimo de

[23] Hartley Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective computability*. New York, 1967, McGraw-Hill, p. 31.
[24] Para una exposición detallada de las condiciones iniciales y los corolarios consultar George Boolos; John Burgess y Richard Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 2007, pp. 187 -192.
[25] Se sigue que probar que un sistema formal es indecidible es otra forma de mostrar que es incompleto.

aritmética elemental (teorías que contienen la aritmética de Robinson) son tanto incompletas como indecidibles[26].

El teorema de incompletud plantea, por lo tanto, la condición necesaria (aunque no suficiente) para determinar uno de los resultados básicos de la teoría de la computabilidad, esto es, la insolubilidad recursiva de ciertos problemas de aritmética elemental; las sentencias indecidibles de Gödel constituyen así la condición de posibilidad para el establecimiento de la tesis de Church-Turing a partir de la solución negativa del *Entscheidungsproblem*.

Hay otro argumento que señala que el teorema de incompletud establece un tipo de protección para la tesis fundante de la teoría de la computabilidad, este argumento pertenece a Webb y también señala que la incompletud impide que el *Entscheidungsproblem* sea resuelto de manera positiva por algún tipo de método que utilice el algoritmo del Museo Británico, pero en este caso la consideración va dirigida al hecho de que la indecidibilidad de las sentencias muestra que tal método no puede ser, de hecho, un método efectivo.

En 1929, en su tesis doctoral Gödel demostró la completud de la lógica de primer orden, esto es, demostró que para cada fórmula *A* expresable en LPO o bien puede demostrarse su validez, derivando *A* desde los axiomas en una secuencia finita de inferencias formales, o bien *A* puede ser refutada por un contraejemplo. En la introducción a *On the completeness of the calculus of logic* Gödel reflexiona en torno a la relación de su teorema con el *Entscheidungsproblem,* señala que la completud podría ser interpretada como un resultado de decidibilidad para LPO, pero ello requeriría de un enfoque enteramente constructivista o intuicionista, donde el principio de tercero excluido aplicable a conjuntos decidibles expresara la solubilidad de cada problema. Gödel señala que éste no es el caso de su prueba, que él empleó en su demostración *all means that are in anyway imaginable*[27] y que "it seems questionable, however a notion of solvability that is so sweeping (...) makes anysense at all"[28] .

Un concepto de solubilidad así de general habilitaría a dar una solución positiva al *Entscheidungsproblem* mediante el siguiente método hipotético: ante la pregunta *¿A es válida?* empezaríamos enumerando todas las posibles pruebas de la axiomatización completa de LPO, intentando encontrar una que termine en *A*, y simultáneamente buscando un contraejemplo de *A* en el conjunto de todos los *medios imaginables*. Asumiendo el principio de tercero excluido (aún para conjuntos infinitos), daremos con *A* o con su contraejemplo. El punto esencial de esta argumentación de Gödel es que si bien el teorema de completud nos asegura que mediante un método efectivo –el algoritmo del Museo Británico- será posible dar con una prueba de *A* si ésta fuera válida, el mismo método no podrá aplicarse para decidir de manera efectiva sobre las posibles técnicas empleadas para hallar contraejemplos, pues el teorema de completud está libre de cualquier restricción metodológica constructivista. Gödel señala así que los medios para hallar contraejemplos suponen un concepto de solubilidad demasiado general para aportar alguna conclusión válida acerca del problema de la decisión a partir de su teorema de completud.

Webb ha evidenciado una interesante conexión entre estas ideas de Gödel en 1929 y una nota a pie de página del artículo de 1931, *On formally undecidablepropositions of Principia Mathematica and related systems.* En este último presenta el teorema IX aplicable a cualquier sistema formal que incluya una cierta cantidad de aritmética elemental: "...there are undecidable problems of the restricted functional calculus (that is, formulas of the restricted functional calculus for which neither validity nor existence of a counterexample is provable)"[29], ante lo cual agrega en la nota 55 a pie de página: "In 1930 I showed that every formula of the restricted functional calculus either can be proved to be valid or has a counterexample. However, by

[26] Panu Raatikainen, "Gödel's Incompleteness Theorems", Edward N. Zalta (ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Spring 2014 . URL = http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/goedel-incompleteness/

[27] Kurt Gödel, «*On the Completeness of the Calculus of Logic (1929)"* en Kurt Gödel, 1986, op. cit. pp. 64-65.

[28] Íbid. Nota 4 a pie de página.

[29] Kurt Gödel, 1931, op.cit. p.187.

the Theorem IX the existence of this counterexample is not always provable (in the formal systems we have been considering)"[30].

Webb señala que esta nota es esclarecedora porque permite dar respuesta a cualquier argumento que intente ofrecer una solución positiva al *Entscheidungsproblem* empleando aquel método hipotético que señaló Gödel en 1929. El teorema de incompletud señala que en cualquier sistema formal *P* que contenga un mínimo de aritmética elemental, si el sistema es consistente, entonces habrá en *P* una fórmula *G*, la cual expresa la sentencia *yo soy indemostrable*, que es verdadera y/pero indemostrable en el mismo sistema (la verdad de G se demuestra metamatemáticamente, siempre que asumamos que el sistema sólo demuestra fórmulas verdaderas). Este resultado indica que si bien podemos elaborar un listado de todas las posibles pruebas del sistema, no podremos enumerar de manera efectiva *all means that are in anyway imaginable* para encontrar contraejemplos de *A*. Lo fundamental es que el teorema de incompletud demuestra que la noción de demostrabilidad no admite un tratamiento finitista completo dentro de un único sistema–como bien lo hubiese esperado Hilbert-. Dada una supuesta prueba de una fórmula *A*, será efectivamente decidible si realmente lo es o no, sin embargo dado un supuesto teorema *A,* no hay una manera efectiva de acertar cómo demostrarlo o refutarlo; claramente podemos examinar el listado de pruebas buscando una que termine en *A*, pero no podemos establecer un modo general para determinar si la prueba de hecho aparecerá: "Incompleteness was the discovery that certain algorithms depending on provability in formal systems do not always terminate, in particular that any algorithm for

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ if } \vdash A_n, \\ 0, \text{ if } \vdash \neg A_n \end{cases}$$

is necessarily partial for suitable f –non terminating for Gödel´s undecidable sentences"[31].

Dado que el teorema de incompletud ha demostrado que el conjunto de teoremas de *P* es recursivamente enumerable, si *A* fuera demostrable podríamos encontrarla empleando un tiempo suficiente (aunque nunca podamos determinar cuánto es *suficiente*), pero si *A* no es demostrable, como de hecho es el caso de la sentencia indecidible de Gödel, no importa cuántos axiomas y reglas sumemos al cálculo, ningún sistema en particular podrá contar con todos los medios necesarios para determinar un contraejemplo no trivial de *A*. Es imposible, por lo tanto, emplear una técnica de *dove tailing* -semejante a la que aludió Gödel en su teorema de completud- para dar una respuesta positiva al *Entcheidungsproblem*, puesto que uno de los dos listados no es computable –no es una lista en absoluto-, la indecidibilidad impide que lo sea; todos los modos posibles para establecer contraejemplos de *A* "never be formalized in any given formal system, however strong the assumptions it may postulate, and so they could hardly be as effectively enumerate as the posible proofs for *A* itself"[32].

En la medida en que el teorema de incompletud está establecido dentro de los límites de la aritmética recursiva primitiva (extendiendo la noción de recursividad tras el trabajo de Kleene) el teorema evidencia la incompletud recursiva de la teoría formal de números, el concepto de solubilidad en este caso está clara y precisamente circunscripto a la noción de recursividad. Es en este sentido que las sentencias indecidibles funcionan como una protección de la tesis de Church-Turing, pues cualquier intento de dar una solución positiva al problema de la decisión se encuentra con la imposibilidad de dar una respuesta efectiva al encontrarse con aquellas.

[30] Íbid. Nota 55 a pie de página.
[31] Judson Webb, op. cit., 202.
[32] Idem, p. 190.

Como apunta Webb, la significatividad de esta conclusión ha dependido de cuán general sea el fenómeno que las sentencias indecidibles representan[33]. Cuán general sea el fenómeno de incompletud dependerá del alcance de la noción de sistema formal, de cuán generales sean las recursiones admitidas y en qué medida ellas captan el concepto intuitivo de método efectivo (y decidibilidad).

1.3 Los planteos conceptuales

El teorema de incompletud de Gödel dejó planteada una serie de inquietudes decisivas para los debates metamatemáticos de principio de siglo XX y para el desarrollo de los problemas básicos de la teoría de la computabilidad; en particular, la investigación sobre los procedimientos recursivos (y su identificación con los procedimientos efectivos) y la necesidad de caracterizar la noción de sistema formal. En este sentido el artículo de Gödel de 1931 aporta una serie de nuevas preguntas e ideas que extendieron el horizonte de la metamatemática tal como la había caracterizado Hilbert y precisaron muchas de sus nociones principales.

En las primeras décadas del siglo XX el programa metamatemático de Hilbert había colocado en primer plano la noción de función efectivamente computable, en *Über das Unendliche*de 1925, Hilbert arroja una tesis fundamental, a saber, la identificación de lo finitario con lo recursivo: "The method of search for the recursions required is in essence equivalent to that reflection by which one recognizes that the procedure used for the given definition is finitary"[34].

De acuerdo a esta propuesta -que puede ser interpretada como un antecedente capital de la tesis de Church de 1936- un entendimiento adecuado del concepto de procedimiento finito requeriría de una formalización de dicha noción a la luz de la recursividad. Restaba, por supuesto, un esclarecimiento de la noción metamatemática intuitiva de finitud -tal como la empleaba Hilbert- y una precisión sobre cuál es el alcance de la recursión, o sea, una determinación de la clase de funciones recursivas.

El teorema de incompletud, como ya observamos, se encuentra modelado epistemológica y metodológicamente por las ideas de la escuela de Hilbert, por lo que no es casual que Gödel eligiera definir por primera vez la clase de funciones recursivas primitivas y las utilizara como la aritmética elemental de su sistema. En la medida en que Gödel establece una correspondencia biunívoca entre la metateoría de su sistema formal P y la aritmética recursiva, establece también, bajo la tesis de Hilbert, la rigurosidad finitista de los procedimientos aplicados y con ello la posibilidad de que los conceptos metamatemáticos sean verificados mediante un número finito (recursivo) de pasos, o sea, *usando sólo unas pocas reglas mecánicas*[35]. La aritmetización de la metamatemática tal y como la plantea Gödel favorece así el tratamiento calculatorio finitista de la teoría crítica de Hilbert de los sistemas formales y, al mismo tiempo, fortalece la investigación sobre funciones recursivas y su identificación con el concepto de función efectivamente computable.

En años anteriores a la publicación del teorema de incompletud de Gödel, la escuela de Hilbert había demostrado la existencia de múltiples funciones que no se ajustan a la clase de funciones recursivas primitivas definida por Gödel, pero que asimismo son recursivas aunque en un sentido más general, la función de Ackermann es el caso paradigmático. Esta clase de tipo más general desafiaba las expectativas finitistas de la escuela de Hilbert: "In fact, Ackermann´s discovery seemed to Hilbert and others to open the floodgates of recursion and diagonalization, and it hardly seemed possible to find any single new recursive principle to cover the myriad 'variety of ways we can pass from n to n+1'"[36].

---

[33] Judson Webb, "Gödel´s Theorems and Church´s Thesis: A Prologue to Mechanism"en Cohen, R. y Wartofsky, M. (eds.), *Language, Logic and Method, Boston, 1983, D. Reidel Publishing Company,* p. 328.

[34] David Hilbert, "On the Infinite(1925)", en Jean van Heijenoort, op. cit. p. 388.

[35] Kurt Gödel, 1931, op. cit. p.145.

[36] Judson Webb, 1983, op. cit. p. 324.

La dificultad fue, según señala Rogers[37], evitar que la diagonalización sobre el conjunto de funciones recursivas excluyera la posibilidad de conformar una teoría completa de funciones recursivas y, al mismo tiempo, una teoría plausible de funciones efectivas. El argumento diagonal, tal como lo había planteado Cantor, se presentaba como un método matemático potente aplicable a cualquier caso donde los conjuntos pudieran ser efectivamente listados, desafiando de esa manera el reclamo metamatemático de finitud consolidado en el programa de Hilbert. Como lo señala Webb, aquí se encuentra una especie de paradoja de Richard, en la cual la contradicción se manifiesta entre los dos niveles de análisis: por un lado, las funciones efectivas son *matemáticamente* no-enumerables por diagonalización y, por otro lado, las funciones efectivas son *metamatemáticamente* enumerables por la 'finitud' de sus definiciones o algoritmos[38].

El reto fue entonces establecer una caracterización formal que evitara un listado efectivo del tipo señalado y aun así fuera útil tanto para la caracterización formal de la clase de funciones efectivamente computables, como para el concepto intuitivo de efectividad[39]. Esto es, una caracterización de funciones efectivamente computables que fuera lo suficientemente inclusiva como para abarcar todas las funciones computables y todos los posibles métodos efectivos[40] y que, al mismo tiempo, supiera hacer las concesiones mínimas necesarias y suficientes para excluir la diagonalización y con ello conformar una teoría formal satisfactoria tanto desde el punto de vista matemático como metamatemático.

Gödel estuvo muy interesado en conseguir una formalización adecuada de la clase de funciones recursivas, esto era crucial tanto por la relevancia de la noción de recursividad en los fundamentos de la matemática, como por el hecho de que el alcance de su teorema dependía de la generalidad de sus métodos. El teorema de incompletud original se aplica a formalismos que son una variante del sistema *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead y a extensiones (primitivas recursivas) con el mismo lenguaje. Cuando el teorema empieza a ser conocido en los ámbitos matemáticos, surgen algunas dudas acerca de cuáles son los sistemas a los este resultado afecta; Church, por ejemplo, sostenía que su sistema de λ-conversión no estaba sujeto a la incompletud y lo mismo sostenía Herbrand en relación con su sistema de funciones recursivas[41]. En consecuencia, era esencial para Gödel dar una definición general de sistema formal que permitiera formular su teorema de incompletud para una amplia clase de sistemas, y para ello resultaba imprescindible, a su vez, el desarrollo de un concepto matemáticamente preciso de la noción intuitiva de cálculo efectivo o mecánico.

En 1934 Gödel dio una serie de conferencias en la universidad de Princeton sobre su resultado de incompletud, ellas han sido conservadas gracias a las notas tomadas por Kleene y Rosser. En estas conferencias Gödel intentó hacer más general su resultado, menos dependiente de formalismos particulares, y por ello la introducción del artículo comienza definiendo la misma noción de sistema formal:

"A formal mathematical system is a system of symbols together with rules for employing them.(...) We require that the rules of inference, and the definitions of meaningful formulas and axioms, be constructive; that is, for each rule of inference there shall be a finite procedure for determining whether a given formula B is an immediate consequence (by that rule) of given formulas AI,. .. ,An, and there shall be a finite procedure for determining whether a given formula A is a meaningful formula or an axiom"[42].

Esta definición de sistema formal dada por Gödel depende de la noción de procedimiento finito, una noción que dista de ser precisa en aquella época, sin embargo Gödel intenta salvar la imprecisión de esta noción con la identificación de ella con un concepto matemáticamente preciso de recursión, de

[37] Hartley Rogers, op. cit. p. 11.
[38] Judson Webb, 1980, p. 178.
[39] Hartley Rogers, op. cit. 11.
[40] Idem. pp. 18-19.
[41] Véase Wilfried Sieg,. *Mechanical Procedures and Mathematical experience*, Pittsburgh,1991, Carnegie Mellon University, 1991, p. 16.
[42] Kurt Gödel, "On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems (1934)" en Kurt Gödel, 1986, p. 346.

acuerdo al mismo Gödel esta identificación es suficiente para los fines prácticos[43]. Sin embargo, la pregunta conceptual básica sobre qué sea un sistema formal sigue sin una respuesta general satisfactoria, por lo que, bajo la tesis de Hilbert de la identificación de lo finitario con lo recursivo, Gödel intenta profundizar en la idea de recursividad y señala que las funciones recursivas primitivas que él empleó en 1931 "have the important property that, for each given set of values of the arguments, the value of the function can be computed by a finite procedure" [44] y en la nota 3 a pie de página, señala: "The converse seems to be true, if besides [primitive] recursions, recursions of other forms (e.g., with respect to two variables simultaneously) are admitted. This cannot be proved, since the notion of finite computation is not defined, but it serves as a heuristic principle[45]".

La alusión a *recursiones de otras formas* hace referencia a un su intento de generalizar la noción de recursividad; siguiendo una sugerencia de Herbrand Gödel propone en 1934 una definición de una noción general de función recursiva donde establece específicamente cuáles son los procedimientos admisibles en el desarrollo de los cálculos para que cada función tenga un y sólo un resultado[46]. Lo llamativo de la nota a pie de página recién citada es que parece indicar -considerando la generalización de la noción de recursividad-que Gödel estaba ya en posesión de la tesis de Church[47], pero él mismo se encarga de negar tal conclusión:

"It is not true that footnote 3 is a statement of Church's Thesis. The conjecture stated there only refers to the equivalence of "finite (computation) procedure" and "recursive procedure." However, I was, at the time of these lectures, not at all convinced that my concept of recursion comprises all possible recursions; and in fact the equivalence between my definition and Kleene's... is not quite trivial"[48].

Lo relevante de esta respuesta de Gödel es que él apunta a la ausencia de un conocimiento certero acerca de cuán inclusivo es el concepto de recursividad que él estaba empleando –evidentemente, la duda se extiende al concepto de procedimiento finito- y aunque Gödel extiende su concepto de recursividad primitiva al de función (total) recursiva general, aun así permanece la pregunta sobre cuán general eran dichas recursiones a la luz del desafío planteado por la diagonalización para el concepto de efectividad.

Como Gödel mismo afirma, la respuesta a tal desafío fue dada finalmente por Kleene en 1936 en *General recursive functions of natuaral numbers* y *λ-definibilidad y recursividad*. Kleene trabajó sobre el concepto de recursión general de Herbrand-Gödel, y elaboró el concepto de funciones μ-recursivas basadas sobre el principio de minimización. Kleene demostró primero la equivalencia entre la clase de funciones μ-recursivas y la clase de funciones recursivas generales de Gödel y luego la equivalencia entre las funciones λ-definibles y funciones recursivas generales. Estos resultados son cruciales, puesto que de ellos se sigue que la clase de funciones recursivas definida por Gödel debe incluir necesariamente funciones parciales y con ello da una respuesta satisfactoria al desafío planteado por la diagonalización: la clase de funciones recursivas (o funciones efectivamente computables) son enumerables tanto desde el punto de vista matemático como metamatemático.

Con la introducción de funciones parciales a la clase de funciones recursivas generales Kleene obtiene una enumeración recursiva de todas las funciones recursivas y así da una respuesta positiva a la búsqueda de una formalización del concepto de función efectivamente computable. Es claro que si sólo se admiten funciones totales, la diagonalización arroja una nueva función que no estaba listada, en cambio, si se admiten funciones parciales la diagonalización arroja una función que simplemente debe ser indefinida para su propio índice. Rogers señala que la caracterización formal, y en general el trabajo de Kleene en

[43] Idem, p. 361.
[44] Idem, p. 348.
[45] Ibid.
[46] Idem, p. 368.
[47] Véase Martin Davis, "Why Gödel didn´t have Church´s Thesis", en *Information and control*, Vol 54, no. 1, 1982. Pp. 3-24.
[48] Idem. p. 8.

recursividad, tiene como consecuencia directa y casi trivial la existencia de problemas recursivamente insolubles[49]. Rogers hipotetiza en torno a la caracterización formal conseguida: quizá alguien tuviera la *esperanza* de reinstaurar la diagonalización en el listado de funciones computables, seleccionando efectivamente sólo aquellas que sean funciones totales, pero cualquiera que intentara hacerlo se encontraría con la imposibilidad de hallar un modo efectivo de llevar a cabo tal selección[50]. Este es precisamente el resultado de insolubilidad planteado por el *halting problem* de Turing y es también, de acuerdo a Rogers, el corolario general del teorema de incompletud de Gödel.

Rogers afirma: "Gödel showed in his epochal paper [1931] that no algorithm out of a rather broad class could serve as such a decisión problem"[51], inmediatamente, en una nota a pie de página señala que esta idea no es explícita en el teorema de Gödel, puesto que su trabajo precedió al estudio general de las funciones recursivas y claramente desconocía los resultados asociados a la tesis de Church-Turing. Sin embargo, de acuerdo a Rogers, una nueva versión generalizada del teorema de incompletud muestra que no puede existir ningún método general de decisión ya que la amplia clase de algoritmos para los cuales el método de Gödel se aplica incluye, de hecho, *todos* los algoritmos.

Bajo estas consideraciones podemos apreciar que el problema de la generalización del teorema de incompletud fue un punto nodal en el desarrollo de la teoría de la computabilidad. La inquietud sobre la generalidad del resultado de incompletud–dependiente a su vez de la generalización de la noción de recursividad- fue un estímulo fundamental en el planteo de algunas de las cuestiones centrales de la teoría de la computabilidad, principalmente, en la determinación de un concepto de procedimiento finito capaz de abarcar todos y sólo aquellos procedimientos intuitivamente efectivos y, en base a ello, la especificación de la noción actual de sistema formal: "A formal system can simply be defined to be any mechanical procedure for producing formulas, called provable formulas"[52].

2. El teorema de Gödel como *un escudo protector invisible para los fundamentos del mecanicismo moderno*

> The more I study the history of mechanism, the more it looks to me as if Gödel (...) may have snatched mechanism from the jaws of defeat.
>
> *Judson Webb*

2.1. Las capacidades de la mente

El teorema de incompletud de Gödel ha sido frecuentemente interpretado como aportando una evidencia absoluta en contra del mecanicismo. Uno de los argumentos más difundidos al respecto señala que el teorema de Gödel ha demostrado que la potencia de la mente humana excede los límites de cualquier mecanismo o sistema formal, con lo cual se afirma que entre máquinas y seres humanos existe una diferencia esencial que socava cualquier pretensión de que una máquina modele adecuadamente la mente humana. Lucas se inscribe en esta línea de argumentación: "Gödel's theorem seems to me to prove that Mechanism is false, that is, that minds cannot be explained as machines"[53].

[49] Hartley Rogers op. cit. 39.
[50] Idem. p. 12.
[51] Idem, p. 38
[52] Kurt Gödel, 1934, op. cit. p. 370.
[53] John Lucas, "Minds, machines and Gödel" en Malcolm Kenneth y James Fedrrick, *The Modelling of Mind. Computers and Intelligence,* 1963, Notre Dame, 255.

El argumento anti-mecanicista de Lucas asume que el teorema de Gödel demuestra que la mente humana posee capacidades de las cuales las máquinas carecen, en particular, que para cada máquina hay problemas que ésta no puede resolver y que, sin embargo, la mente sí puede: "(...) given any machine which is consistent and capable of doing simple arithmetic, there is a formula which it is incapable of producing as being true –i.e., the formula is unprobable in the system but which we can see to be true. It follows that no machine can be a complete or adequate model of the mind, that minds are essentially different from machines"[54]

El argumento parte de la idea de que para cualquier sistema formal consistente hay una sentencia *G* verdadera que el sistema no puede demostrar pero que nosotros, no obstante, podemos ver que es verdadera. El teorema de Gödel, evidentemente, no expresa nada acerca de lo que *la mente puede ver*, ni tampoco acerca de la verdad de la sentencia *G*; lo que el teorema expresa tiene una forma condicional y se aplica a cierta clase específica de sistemas formales: si el sistema *P* es consistente, la sentencia *G* será verdadera pero indecidible, y este resultado es demostrable dentro del mismo sistema *P*. Entonces hay dos cuestiones a remarcar:

I. Si es posible demostrar la consistencia de *P*, entonces se demostrará la verdad de *G*, pero la verdad o falsedad de *G* no puede demostrarse en base al teorema de incompletud.
II. El teorema de incompletud demuestra la indemostrabilidad de *G* dentro del mismo sistema incompleto, no es necesaria ninguna facultad especial de la mente para construir la sentencia *G* y demostrar su indecidibilidad.

Por lo tanto, sobre la base del teorema de Gödel, no se puede afirmar que la mente pueda probar más cosas que una máquina, de hecho, si como hemos apuntado anteriormente, la esencia del teorema de incompletud es la demostración de la incompletud recursiva de la teoría formal de números, lo que el teorema muestra es que tanto seres humanos como máquinas estamos expuestos a los mismos límites al tratar con conjuntos no recursivos: "It seems clear that Godel's theorem cannot establish that the human mind is "stronger" than a machine: the machine can prove just as much, probably more, than a mind. More exactly: the machine can enumerate just as large a subset of its unprovable Godel sentences (this set is not r.e.) as any mind. The question is rather: do minds and machines establish their theorems in basically the same way, or do they proceed in essentially different ways? And does Godel's result, assuming they prove essentially different, illuminate this difference?"[55].

De cara al problema de los conjuntos no recursivos tanto la mente como un sistema formal tienen los mismos límites, ya que los límites que establece la noción de efectividad son límites absolutos (no dependientes de formalismos particulares, ni de realizaciones físicas), por lo tanto cualquier procedimiento efectivo –sea llevado a cabo por un humano o por una máquina- pierde la posibilidad de dar una respuesta ante una sentencia indecidible de Gödel o un problema recursivamente insoluble. El foco de la cuestión debe estar entonces en la incomputabilidad de ciertos problemas, un límite al que estamos expuestos tanto humanos como máquinas. Por otro lado, si los anti-mecanicistas pretenden demostrar, en base al teorema de Gödel, que el poder *deductivo* de la mente humana es mayor que el de una máquina (o sea, que un humano puede probar más cosas que una máquina) entonces deben probar que el conjunto de teoremas que produce la mente no es recursivamente enumerable[56], claramente, no contamos con ese resultado.

Aún queda, sin embargo, la posibilidad de preguntar con qué facultades deductivas cuenta la mente humana para resolver los problemas de decisión, esto es, si la mente humana está limitada o no a métodos constructivos al enfrentarse con este tipo de problemas. Webb ha elaborado esta idea: si asumimos que la mente procede de un modo constructivo, el teorema de incompletud frustra tanto a

[54] Idem, p. 256.
[55] Judson Webb, "Metamathematics and the Philosophy of Mind" en *Phylosophy of science*, 1968, vol. 35, no. 2. P. 169. URL: http://www.jstor.org/stable/186484 .
[56] Idem, p. 176.

humanos como a máquinas, pero si partimos de la tesis contraria, o sea, que la mente cuenta con más recursos deductivos, entonces no hay nada que nos impida asumir *desde el principio* que los recursos del ser humano abarcan más que los de las máquinas, "But then Godel's theorem is no longer needed, since we have now assumed what we wanted to prove!"[57].

Por lo tanto, el teorema de Gödel no establece nada acerca de las capacidades de la mente humana, a menos que asumamos que la mente humana puede ser modelada adecuadamente por un sistema formal o una máquina, pero esa es otra tesis, una que no depende, en absoluto, del fenómeno de incompletud e incluso, es la misma tesis que los anti-mecanicistas pretenden derribar en base este mismo fenómeno.

2.2. Los límites demostrables de las máquinas

El teorema de Gödel ciertamente demuestra el límite en la capacidad deductiva de los sistemas formales al mostrar cómo construir una sentencia *G* indecidible. Ahora bien, eso no significa que quien demuestra ese límite no sea una máquina, de hecho, el límite se demuestra dentro del mismo sistema formal y circunscribiendo la demostración a métodos efectivos.

En el apartado 1.1 hemos desarrollado el vínculo de la metodología desarrollada por Gödel en su teorema con la noción de procedimiento efectivo, establecimos que en tanto Gödel asumió la tesis de Hilbert (la identificación de lo finitista con lo recursivo) su aritmetización arrojó como uno de sus resultados más relevantes la formalización del proceso diagonal, esto es, mostró cómo construir la fórmula indecidible *G* de manera efectiva. Asumiendo la tesis de Church-Turing, lo que Gödel ha demostrado es que una máquina puede desarrollar el argumento de incompletud, Webb señala que este resultado es fundamental para el mecanicismo al menos en dos respectos[58]:

I. Ahora las máquinas pueden computar fórmulas indecidibles;
II. La construcción efectiva de fórmulas indecidibles es una evidencia a favor de la tesis de Turing de que las máquinas pueden hacer todo lo que nosotros podemos hacer de manera efectiva.

Si una máquina puede elaborar el argumento de Gödel y demostrar la incompletud de otra máquina (o de sí misma), entonces eso no indica que quien lo demuestra exceda el límite demostrado para el sistema mismo, esto es: 'Since a machine can apply Gödel´s purely mechanical routine of diagonalizing a formal system or machine, being able to do this to any machine no longer implies that you are not a machine" [59].

Lucas elabora uno de sus argumentos en relación con esta idea de efectividad que hay tras el argumento diagonal de Gödel, aunque, claramente, es un argumento anti-mecanicista. Dado que podemos construir la sentencia indecidible *G* para una máquina, entonces podemos *engañar* a esa máquina dándole a resolver una pregunta que no puede responder, esto es, dándole a resolver el problema de la deductibilidad de la fórmula de Gödel. El argumento de Lucas se dirige a mostrar que esa máquina no puede ser un modelo de mí, porque yo mismo la he confundido con una pregunta que no puede resolver, "the mind has the last word, it can always pick a hole in any formal system presented to it as a model of its own workings"[60].

Lucas señala que la conclusión se aplica sobre todas las máquinas -y no es, como había señalado Turing, un pequeño triunfo sobre alguna máquina en particular[61]- "for the triumph is not over only an

---

[57] Idem, p. 172.
[58] Judson Webb, 1980, op. cit. p. 193.
[59] Idem, p. 151.
[60] John Lucas, op. cit. p. 260.
[61] Alan Turing, "Computing machinery and intelligence" en *Mind* ,1950. Pp. 433 - 460. URL: http://www.jstor.org/stable/2251299

individual machine, but overany individual that anybody cares to specify, and a mechanical model of a mind must be an individual machine"[62]. Lo interesante de esta reflexión de Lucas es que ella se sostiene sobre la idea de efectividad que permite asegurar que para cada máquina habrá necesariamente una fórmula indecidible -su talón de Aquiles[63] que podremos calcular de manera general: "The procedure where by the Gödelian formula is constructed is a standard procedure---only so could we be sure that a Gödelian formula can be constructed for every formal system"[64].

Lucas apela a que el triunfo del argumento anti-mecanicista es sobre cada máquina y no sólo sobre una individual, porque para cada máquina que podamos especificar Gödel demostró cómo construir de un modo general y efectivo la fórmula indecidible *G*. Como apunta Webb, este argumento de Lucas se fundamenta en última instancia en la efectividad con la cual él mismo puede calcular el talón de Aquiles de cualquier máquina, pero por la misma razón podemos afirmar que "if Lucas can effectively stumpany machine, then by (T´) [Turing´s Thesis] there must be a machine which does this too!"[65].

El anti-mecanicismo en este punto sucumbe bajo sus propias razones. La tesis de que el mecanicismo actual está fundado en la tesis de Church-Turing implica la posibilidad de mecanización de cualquier operación efectiva (esto por supuesto no implica que todas las operaciones sean de hecho efectivas), entonces el mecanicismo no puede ser refutado apelando a procesos efectivos, no puede colocar a la noción de efectividad como sustento de lo que un ser humano puede hacer de un modo general, puesto que el análisis de Turing nos ha enseñado que no hay diferencia esencial entre el proceder efectivo de un ser humano y una máquina.

Es por esta razón que la formalización del argumento diagonal llevada a cabo por Gödel es tan importante para el mecanicismo, pues impide razonamientos del tipo: *si yo puedo demostrar los límites de cada máquina, entonces yo no soy una máquina*. De acuerdo a Webb, el dilema básico que debe confrontar el anti-mecanicismo actual al respecto es o bien aceptar la refutación del argumento que utiliza el teorema de Gödel, o bien concluir que ciertas máquinas no pueden ser modeladas por ninguna máquina: "In short, anti-mechanist arguments must either be ineffective, or else unable to show that their executor is not a machine"[66] .

2.1. La predecibilidad

De acuerdo a lo analizado en el apartado 1.2, el resultado teórico de incompletud protege el resultado negativo del *Entscheidungsproblem*, esto es, evita que el problema de la decisión sea resuelto de manera positiva por cualquier método efectivo. Webb destaca que la protección que brinda la incompletud para aquel resultado negativo es fundamental en el sostenimiento de la tesis mecanicista. Pero ¿por qué una solución positiva del *Entscheidungsproblem* hubiera afectado de manera negativa al mecanicismo? De hecho, de acuerdo a las preocupaciones manifestadas por algunos matemáticos de principios de siglo XX, el planteo era exactamente el opuesto: "The very day on which the undecidability does not obtain any more, mathematics as we now understand it would cease to exist; it would be replaced by an absolutely mechanical prescription (eine absolute mechanische Vorschrift) by means of which anyone could decide the provability or unprovability of any given sentence"[67] .

Se entendía que una solución positiva del *Entscheidungsproblem* tendría como consecuencia precisamente la validación del mecanicismo, o sea, la posibilidad del reemplazo del pensamiento (esencialmente humano) por un conjunto de prescripciones absolutamente mecánicas, habilitando así a la

---

[62] John Lucas, op. cit. p.261.
[63] "The Gödelian formula is the Achilles' heel of the cybernetical machine" (Idem, p. 259).
[64] Idem, p. 260.
[65] Judson Webb, 1980, op. cit. p. 230.
[66] Idem. p. 232.
[67] John von Neumann, citado por Sieg, op. cit. p. 14.

dilución de cualquier diferencia entre humano y máquina. Sin embargo, los resultados en torno al concepto de procedimiento efectivo y, en particular, el análisis de Turing han constatado que la consecuencia es exactamente la opuesta, una solución positiva del *Entscheidungsproblem* hubiera apuntado la imposibilidad de construir modelos mecánicos del comportamiento humano, permitiendo la aplicación del clásico argumento anti-mecanicista que señala una diferencia esencial entre la predecibilidad de las máquinas (que están regidas por reglas) y la impredecibilidad de los humanos (que siguen reglas).

De acuerdo a esta tesis anti-mecanicista, en tanto que el ser humano es autónomo su comportamiento no puede ser establecido *a priori,* sólo admite una descripción *a posteriori*; en cambio con las máquinas, al ser entes deterministas, sucede lo contrario, su comportamiento es predecible. La insolubilidad recursiva del *Entscheidungsproblem* y la identificación de lo mecánico con lo efectivo (la tesis de Turing) vulneran precisamente este argumento, puesto que demuestran que tanto se trate de una máquina como un humano actuando de manera efectiva es absolutamente imposible describir *a priori* su comportamiento, "… our predictions of Mu´s behavior [universal machine's behavior], as in the case of human rule following acts, must be post hoc: the only 'method' for telling what Mu will do is to wait and see"[68].

El mecanicismo actual, modelado por el concepto preciso de procedimiento efectivo, guarda lugar para la impredecibilidad, no como un fenómeno que se explica a partir de la ignorancia de los factores intervinientes, sino como parte de sus fundamentos intrínsecos. El concepto de efectividad aporta entonces un fundamento sólido a favor de la simulación mecánica de los comportamientos humanos, ya que se ha constituido en uno de los pocos conceptos formales absolutos, en el sentido que no depende de formalismos particulares y, por supuesto, tampoco de realizaciones físicas, con lo cual diluye cualquier diferencia esencial entre el comportamiento efectivo de una máquina y el de un ser humano. Se comprende así la relevancia de la protección que las sentencias indecidibles de Gödel tienen en relación con el mecanicismo actual, ellas impiden que el *Entscheidungsproblem* sea resuelto por un método efectivo y arroje así una distinción infranqueable entre el comportamiento de una máquina y el de un humano siguiendo reglas preestablecidas.

A modo de conclusión

El teorema de incompletud de Gödel se encuentra modelado por las prescripciones de la metamatemática finitista de Hilbert y su tesis –antecedente significativo de la tesis de Church- relativa a la identificación de la clase de funciones efectivamente computables con la de funciones recursivas. Esto es de capital importancia para el entendimiento del teorema y sus implicancias, tanto desde un punto de vista histórico como epistemológico y conceptual; aclarando el vínculo de los métodos y resultados teóricos de Gödel con el modelo metodológico y epistemológico de la escuela de Hilbert se logra poner en evidencia la relevancia de este teorema –en sus diversas posibles dimensiones de análisis- para el desarrollo de la teoría de la computabilidad y, en consecuencia, para el mecanicismo.

Mediante un análisis cuidadoso de la propuesta de Webb respecto de estos temas, hemos fortalecido la hipótesis inicial según la cual el teorema de Gödel no es, bajo ningún punto de vista, un resultado negativo o limitativo; muy por el contrario, es un resultado clave para entender el inusitado desarrollo de las ciencias formales en el siglo XX y el vínculo existente entre ellas y el nuevo mecanicismo fundado en la posibilidad de construir modelos computacionales de la mente. Apreciar el teorema de incompletud desde este punto de vista nos ha exigido colocar en el centro del análisis la noción de procedimiento efectivo y considerarla tal y como se la emplea en la teoría de la computabilidad y, al mismo tiempo, desde una perspectiva histórica, epistemológica y filosófica. La comprensión del teorema de

[68] Judson Webb, 1980, op. cit. 233.

Gödel mediada por el análisis de esta noción en aquellos aspectos ha dado como resultado una comprensión enriquecida tanto del teorema de incompletud mismo, como de la noción de procedimiento efectivo y las implicancias que éste tiene en áreas afines como lo son la filosofía de la matemática y la filosofía de la mente.

Recibido: 13 de septiembre 2017
Aceptado: 20 de septiembre 2017