CONTEXTOS DE EDUCACION © 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC.
Este artículo pertenece a la Revista Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 120-135
y fue descargado desde: www.hum.unrc.edu.ar/ojs/index.php/contextos

EL ÁLGEBRA COMO HERRAMIENTA DE MODELIZACIÓN Y VALIDACIÓN: LAS INTERACCIONES EN EL AULA COMO MEDIO PARA SU EVOLUCIÓN

ALGEBRA AS A MODELING AND VALIDATION TOOL: IT'S EVOLUCION THROUGH CLASSROOM INTERACTIONS

Flavia Buffarini

Universidad Nacional de Rio Cuarto - República Argentina
fbuffarini@exa.unrc.edu.ar

Palabras Clave

álgebra

modelización

validación

interacciones

Resumen

Este trabajo se inscribe en un problema antiguo, ampliamente abordado, pero no por ello resuelto: el problema didáctico del álgebra elemental. Se recorta un pequeño sector de esta problemática: la dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación. Se asume como hipótesis general que las interacciones entre los alumnos en el marco de una clase, sostenidas con una intencionalidad docente, podrían colaborar en la evolución de sus conceptualizaciones y, en particular, en la adquisición de esta dimensión del álgebra. Se plantea que al hacer interactuar a los alumnos a partir de producciones personales diferentes, desplegadas en la resolución de un problema específico, produciría una calidad de solución que superaría lo realizado inicialmente. Cada alumno en interacción con otros, bajo la consigna específica de *acordar* una resolución, se vería obligado a explicitar una justificación y en esta explicitación iría precisando las relaciones puestas en juego en su resolución, enriqueciendo el conocimiento que se tiene sobre los objetos y modificando la propia relación con el trabajo algebraico. El objetivo planteado en la investigación que se presenta fue precisar, bajo un diseño de trabajo particular en la clase, el papel que juega las interacciones en la re-apertura, re-flote o inauguración -dependiendo del sistema *inicial* de conocimientos de cada alumno- del álgebra como herramienta de modelización y validación. Bajo la hipótesis planteada y tras el objetivo trazado se planifica y se ejecuta una intervención en el aula, en la entrada universitaria. Posteriormente se realiza un análisis de la misma y se estudia el papel de las interacciones.

Cita sugerida: Buffarini, F. (2019). El álgebra como herramienta de modelización y validación: las interacciones en el aula como medio para su evolución. *Contextos de Educación* 26 (19): 120-135

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 120-135

Key words

algebra

modeling

validation

interactions

Abstract

This work emphasizes a problem which has been widely studied but not solved yet: the didactic problem of elementary algebra. To narrow the topic down, the following paper focuses on the dimension of algebra as a modeling and validation tool. It is assumed as a general hypothesis that the interactions between students within the framework of a class, sustained with a teaching intentionality, can contribute to the evolution of their conceptualizations and, in particular, in the acquisition of this dimension of algebra. It is suggested that students who interact and contribute with different personal productions, deployed in the resolution of a specific problem, are likely to produce a quality solution that would exceed the one which was initially achieved. Each student in interaction with others, is required to agree on a resolution and to explain and justify it and, in through this explanation each student will specify the relationships put into play in his/her resolution, enriching the knowledge they have about the objects and modifying their own relationship to algebraic work. The objective of this research is to specify, after a particular work design in the class, the role the interactions between students play in the re-opening, re-floating or inauguration of algebra as a modeling and validation tool, as it depends the initial knowledge system of each student. Considering the initial hypothesis and goal to achieve, an intervention is planned and executed in the classroom, at the university entrance course. Afterwards, an analysis of it is carried out and the role of the interactions is studied.

Introducción

¿Dificultades *cognitivas* de los alumnos para poder adquirir un sentido robusto de los objetos y del tratamiento algebraico? ¿Debilidades de las propuestas de enseñanzas que se dejan seducir por el espacio seguro del aprendizaje de un conjunto de técnicas? ¿Complejidad intrínseca del campo algebraico y de la actividad de modelización? Muchos son los interrogantes que se entrecruzan al intentar buscar una explicación a los *pobres* aprendizajes de nuestros alumnos en relación con el trabajo de modelización algebraica. Nuestra preocupación al respecto como docente de la escuela secundaria se profundiza como docente universitaria al advertir que este bagaje dificulta la entrada de los alumnos al tipo de racionalidad que se espera de ellos en este nivel y, aún más, al tomar consciencia que tampoco es en la Universidad donde se solucionan estos problemas.

El trabajo que presentamos se inscribe en una investigación[1] cuya problemática se estudia desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986), la misma propone un modelo desde la cual pensar la clase de matemática. En este modelo la enseñanza es mirada como un proceso centrado en la producción, transformación y validación de los conocimientos matemáticos.

La Teoría de Situaciones está sustentada en una concepción constructivista del aprendizaje que se vislumbra claramente en el siguiente postulado: el alumno aprende adaptándose a un medio que le produce contradicciones, dificultades y desequilibrios; y las nuevas respuestas, producto de la adaptación del alumno, son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1986).

Si bien este postulado es central en la teoría, el mismo resulta insuficiente porque ningún medio sin intenciones didácticas puede inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que adquiera (Brousseau, 1986). En efecto, Brousseau consideraba que el aprendizaje *natural* de la propuesta piagetana corría el riesgo de liberar de toda responsabilidad didáctica al maestro. Por ello, lo que pondría en el centro del análisis sería la *situación didáctica*, que es una situación construida intencionalmente para que el alumno adquiera un saber determinado, la cual define como: un conjunto de relaciones que se establecen explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio y un sistema educativo con el propósito de que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, 1982). Este modelo describe así la enseñanza de las matemáticas a partir de las interacciones del alumno con un *medio*[2], y entre el docente y el alumno a propósito de la interacción del alumno con el *medio*. Se reconoce que las acciones de los alumnos no se estudian de manera aislada, sino en interacción con quienes comparten la misma comunidad de la clase.

Esta teoría se constituye en una potente herramienta para conocer, explicar y dar elementos de intervención en las clases de matemática. Bajo este encuadre abordamos el estudio de un problema antiguo, muy estudiado, sin embargo, no resuelto que es el problema didáctico del álgebra elemental. Hacemos foco en una problemática, para estudiarla con más detenimiento, *la dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación.*

Planteamos como hipótesis que las interacciones entre los alumnos, en el marco de una clase, podrían colaborar en la evolución de sus conceptualizaciones y en la adquisición de esta dimensión del trabajo matemático. Consideramos que al hacer interactuar a los alumnos a partir de producciones parciales, con distintas estrategias empleadas en la resolución de un cierto problema, se produce una calidad de solución que supera lo que cada alumno produjo inicialmente.

Se plantea que en la interacción, a propósito de un problema que ponga en juego distintas dimensiones del álgebra, los alumnos se verán obligados a tener que explicitar sus justificaciones de lo que han hecho y con esta explicitación se va a ir enriqueciendo el conocimiento que se tiene sobre los objetos, precisando las relaciones entre los objetos algebraicos y entre los sentidos de los mismos y delineando la propia relación con el trabajo algebraico.

Bajo esta hipótesis nos propusimos diseñar una intervención en el aula en el ingreso universitario, en el que la población de alumnos posee distintas maneras de hacer, diferentes trayectorias, historias y culturas algebraicas. Somos conscientes que el trabajo sobre un problema en el contexto de una clase es solamente un pequeño aporte hacia la construcción de una dimensión ausente del álgebra elemental: el álgebra como herramienta de modelización y validación. Nuestro objetivo es precisar el papel que juegan las interacciones con un diseño de trabajo particular. Estudiar, vía una propuesta, el rol de las interacciones en la *re-apertura*, *re-flote* o *inauguración* -dependiendo del sistema *inicial* de conocimientos de cada alumno- del álgebra como herramienta de modelización y validación. Es decir, se quiere estudiar el papel de las interacciones en un análisis micro, la intimidad de un proceso de aprendizaje, la trama de la construcción para un caso específico, y se la quiere estudiar incluyendo al docente. Se intenta ver como el docente aporta a este trabajo y lo que puede o no puede hacer como miembro de una institución.

Varias preguntas referidas al funcionamiento de las interacciones, a propósito de un problema que ponga en juego la dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación, guiaron inicialmente nuestro trabajo:

¿Qué aportan los momentos de interacción entre distintas producciones para avanzar en el trabajo sobre un problema donde el álgebra aparezca como herramienta de modelización y de validación, aspecto al que los alumnos no están acostumbrados? ¿Cualquier problema que ponga en juego esta dimensión del álgebra sería fértil para el trabajo en interacción? ¿Cómo juega la aritmética como herramienta para avanzar sobre el problema? ¿Cómo debería ser la organización de la tarea para capitalizar el trabajo en interacción? ¿Se podrán determinar las condiciones bajo las cuales la interacción entre pares ofrece retroacciones y produce avances en los aprendizajes individuales?

¿Cómo influye en las distintas maneras de ir evolucionando en interacción, las tensiones entre mejor manejo de la herramienta algebraica en algunos alumnos, pero con un uso de la misma ligada a la idea de un conjunto de técnicas de cálculo, y menor manejo algebraico en otros, pero mayor grado de libertad y creatividad para el uso de dicha herramienta?

¿Las preguntas y cuestionamientos de un compañero ¿cuánto pueden obligar a explicitar las razones que justifiquen un procedimiento? ¿En qué medida dichas justificaciones enriquecen el conocimiento sobre los objetos algebraicos y sobre los procedimientos? ¿Cuál es el nivel de compresión de los alumnos de lo que quiere decir justificar si se sabe que se va a tener que enfrentar al espíritu crítico de otro compañero?

¿Cuál es el rol del profesor en las interacciones entre pares? ¿Cuáles son sus limitaciones y sus libertades para actuar frente a las producciones que emerjan en la interacción para que se produzca evolución?

Si bien no pretendimos dar respuesta acabada a todos los interrogantes anteriores, los mismos sirvieron como marco de esta investigación la cual se apoya en un trabajo experimental; éste supone una intervención en el aula que pone en juego la enseñanza de la dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación. Para realizarlo contamos con la colaboración de una docente que gestionó la puesta en obra de la clase diseñada. Los alumnos del curso donde se realizó la experiencia corresponden al primer año de la Facultad de Ciencias Exactas Físico - Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto, que aceptaron participar de la misma. La clase fue grabada en audio, se realizaron registros escritos de la misma y estos registros fueron objeto de nuestro análisis.

A continuación presentamos el problema utilizado en el dispositivo didáctico diseñado para la intervención en el aula, justificamos didácticamente la elección del problema y caracterizamos las posibles estrategias de resolución de los alumnos. Seguidamente, enunciamos las hipótesis de trabajo que sostienen la elaboración del dispositivo didáctico en torno al problema seleccionado. Y por último, mostramos el análisis *a priori* de cada etapa delineada en el dispositivo.

Un problema para modelizar y validar: El Ilusionista

> *Un ilusionista está seguro de sí mismo cuando realiza la siguiente rutina. Le dice a un participante: "Piensa un número, súmale 8, multiplica el resultado por 3, réstale 4, súmale el número original, divide por 4, súmale 2, réstale el número original: el resultado es 7". ¿La afirmación es verdadera? Justifique la respuesta.*[3]

El problema seleccionado resulta pertinente para los objetivos propuestos, permite que todos los alumnos desplieguen estrategias de base y respondan la pregunta planteada y, a partir de la resolución, sea posible analizar la relación que se establece entre el alumno y la herramienta algebraica en la búsqueda de la solución.

El enunciado expresa una generalidad implícita, la rutina es válida para todo número. En relación al rol de los cuantificadores se analizó el papel de la palabra *un* en una afirmación de este tipo. Este artículo indefinido se refiere al pronombre adjetivo *cualquier/a*, que a su vez hace referencia al adjetivo *todos*. Es decir, la palabra *un* en el enunciado indica que la propiedad vale para *todos,* o para *cualquier* número.

La verificación con ejemplos en el marco numérico permitiría arribar a una convicción sobre la veracidad de la afirmación del ilusionista, aunque, para dar una prueba se hace necesario recurrir a la herramienta algebraica. En ese sentido este problema pone en evidencia una relación aritmética/álgebra relativamente compleja.

Recurrir a la herramienta algebraica para modelizar el problema requiere un cierto grado de racionalidad matemática, y para avanzar en la justificación, cierta destreza en la operatoria.

El análisis *a priori* que hemos realizado del problema del ilusionista nos ha permitido describir, para esta tarea, las resoluciones esperadas; nos muestra un abanico de posibles estrategias, desde las que despliegan prácticas en continuidad con la aritmética hasta las que ponen en juego prácticas más algebrizadas, con distintas funciones asignadas al álgebra. Además, este análisis pone en evidencia, de un cierto modo, la relación dialéctica entre la competencia algebraica y la racionalidad algebraica del alumno. Aunque el alumno intente una estrategia algebraica para generalizar y probar, llevarla a cabo depende del nivel de gestión del registro algebraico: tipo de grafía, uso adecuado o no de paréntesis, manipulación algebraica en el cálculo y también de la concepción que tenga de los objetos del álgebra y del estatus de dichos objetos. La falta de competencia algebraica puede hacer retroceder al alumno hacia una prueba pragmática. Cabe destacar que los alumnos que realicen una adecuada modelización del problema, una correcta manipulación algebraica y una interpretación de los estados finales obtenidos en el plano algebraico para dar respuesta al problema, no nos asegura que tengan disponible la justificación de los mismos.

El análisis realizado nos permite formular hipótesis de trabajo para la elaboración del dispositivo didáctico. A partir de las soluciones de los alumnos que se han encontrado, y en función de estas, se pretende utilizar como variable didáctica la organización de la clase como medio para hacer evolucionar las estrategias de base hacia la utilización de la herramienta algebraica como herramienta de modelización y validación.

Las hipótesis

Los diferentes significados atribuidos a un texto algebraico van a determinar el tipo de justificación que se puede dar de una declaración que se hace sobre el objeto y que las justificaciones son parte indisoluble de los conocimientos que un sujeto va elaborando sobre los objetos (Lins, 2001). Debido a ello, demandar a los alumnos a dar justificaciones de su trabajo enriquecerá su conocimiento sobre los objetos y los procedimientos, vía estas justificaciones. Para tal fin se prevén diferentes etapas de trabajo, la primera individual, las siguientes de trabajo en grupos y para finalizar una instancia de trabajo colectivo. Se supone que a partir de un primer momento individual de trabajo donde se anticipa que la herramienta algebraica no va a surgir *pulida* en ninguna de las resoluciones, se apuesta que en un trabajo de interacción con las producciones de los otros, bajo la consigna de acordar, haya una evolución hacia una forma de resolución más algebrizada. Por lo que se considera la formación de grupos a partir de resoluciones que movilicen diferentes tipos de estrategias con el fin de instalar en el grupo una microcultura de clase basada en la discusión, la argumentación y la negociación entre pares. En la instancia colectiva se pondrán a disposición de toda la clase las producciones acordadas por los grupos y se renegociarán los significados construidos; en algún sentido, se intentará democratizar el conocimiento. Nos interesa destacar que estamos pensando en un docente presente y activo sosteniendo las distintas instancias de interacciones entre pares.

El dispositivo didáctico

Primera etapa: Se entrega a cada alumno la siguiente consigna:

> *Resolver el siguiente problema de manera individual dejando por escrito los procedimientos de resolución y la justificación de la respuesta.*
>
> ***El problema del Ilusionista***: *Un ilusionista está seguro de sí mismo cuando realiza la siguiente rutina. Le dice a un participante: "Piensa un número, súmale 8, multiplica el resultado por 3, réstale 4, súmale el número original, divide por 4, súmale 2, réstale el número original: el resultado es 7".* ¿La afirmación es verdadera? Justificar la respuesta.

Segunda etapa: Se organizan grupos de cuatro alumnos y se les entrega la siguiente consigna:

> *A partir de lo trabajado individualmente, acordar una respuesta al problema.*
>
> *Escribir dicha respuesta y su justificación para que otro grupo pueda entenderla. Hacer dos copias de dicha respuesta. Divididos en subgrupos de dos alumnos compartirán sus resoluciones con otros grupos.*

Tercera etapa: Se organizan nuevos grupos de seis alumnos y se les entrega una nueva consigna:

> *Analizar las resoluciones que ha construido cada miembro del grupo. A partir de dicho análisis, optar por un procedimiento de resolución entre los propuestos o eventualmente optar por un procedimiento nuevo.*
>
> *Dejar por escrito la resolución acordada y la justificación de la conveniencia de dicha resolución.*

Cuarta etapa: Instancia de trabajo colectivo (No se entregan consignas a los alumnos)

Se analiza con el docente, a partir de las nuevas resoluciones realizadas por los grupos, el poder de la herramienta algebraica como herramienta de modelización y de validación en situaciones matemáticas.

Análisis *a priori* del dispositivo: Hacia la construcción de un conjunto de observables

Primera etapa: Se solicita resolver el problema del ilusionista en forma individual para que los alumnos se hagan cargo del problema y desplieguen sus propias estrategias de resolución, las mismas pueden movilizar los objetos y herramientas de los ámbitos aritmético o algebraico. Esta etapa constituye un momento de trabajo autónomo con el problema en la que el alumno produce relaciones que le servirán de marco para las etapas posteriores.

Dos razones de distinta índole justifican el hecho de solicitar en la consigna de esta etapa que se deje por escrito los procedimientos de resolución y la justificación de la respuesta:

- Para que el profesor pueda observar, al mismo momento que los alumnos están resolviendo, el tipo de estrategias utilizadas por cada alumno e identificar el proceso de resolución privilegiado, de naturaleza aritmética o algebraica, lo que le permitirá tomar decisiones para la formación de los grupos de la etapa siguiente.
- Al solicitar al alumno que deje por escrito el procedimiento y la justificación, se le exige reorganizar su resolución y a precisar su lenguaje, lo que implica un nivel de reflexión sobre la acción que lo obliga a tomar una posición con respecto al conocimiento puesto en juego en su resolución del problema. Dicha posición será movilizada por la consigna de acordar una resolución entre los miembros del grupo en la etapa siguiente.

¿Cuáles podrían ser las estrategias utilizadas por los alumnos que el profesor deberá tener en cuenta en la formación de los grupos? Se identifican *a priori* dos estrategias típicas de resolución, la aritmética y la algebraica y, en relación con esta última, se distinguen aquellas que recurren a ecuaciones de las que lo hacen vía una expresión algebraica.

Destacaremos a continuación cuáles son las características que deberá tener en cuenta el profesor para la conformación de los grupos que trabajarán en la segunda etapa, en paralelo mostraremos algunas producciones representativas de los alumnos, que fueron recogidas en la etapa experimental de la investigación y que dan cuenta de lo analizado *a priori*.

Estrategias de naturaleza aritmética. La justificación prevista es de naturaleza pragmática y se considerará el papel de ejemplos numéricos utilizados para realizar la prueba[4]. Con respecto al tipo de escritura podemos distinguir varios casos:

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 120-135

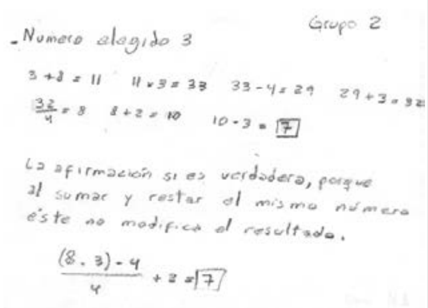
- **Escritura paso a paso en sucesión de operaciones encadenadas**

Alicia escribe como título *"comprobación Nº entero"* y a continuación subraya *"Nº 19"*. Realiza, a partir de ese número, las sucesivas operaciones de manera encadenada hasta obtener 7 y escribe "*la justificación es verdadera"*. Quizás se confunde y lo que quiere decir es que la afirmación es verdadera y la traiciona el pedido de justificación que no puede complacer más que a través de realizar una validación pragmática con más de un valor numérico. Ya que a continuación elige otro número entero, el 5, y realiza el mismo procedimiento que para el 19 hasta obtener 7 y luego lo hace con el número decimal 2,5. No agrega absolutamente nada como justificación. La grafía es incorrecta. Se observa una concepción aritmética del signo igual de anuncio del resultado y no se respeta la equivalencia de las expresiones a ambos lados del mismo (Vergnaud, 1987)[5].

- **Escritura paso a paso en sucesión de operaciones separadas**

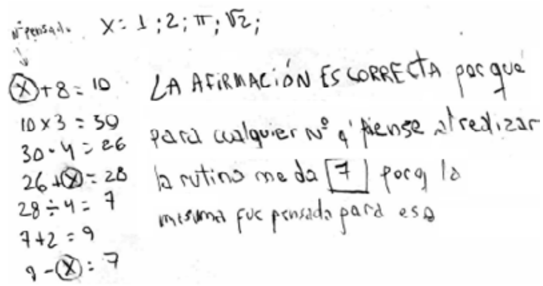
Guillermo elige el número 3 y realiza las distintas operaciones a partir del mismo y de los resultados que va obteniendo, hasta obtener 7. La grafía es correcta con respecto a la igualdad aritmética. Concluye *"La afirmación es verdadera, porque al sumar y restar el mismo número éste no modifica el resultado."* Parece que intenta buscar una justificación en la aplicación de operaciones inversas al número elegido, pero no tiene en cuenta que el número elegido se utiliza dentro de la rutina más de dos veces y no expone ningún argumento que explique lo que está diciendo. Más abajo agrega la siguiente cuenta sobre la que no realiza ningún comentario:

$\frac{(8\,.\,3)-4}{4}+2=7$, pareciera que ejecuta la rutina para el número 0, modelizándola numéricamente con una escritura lineal global correcta.



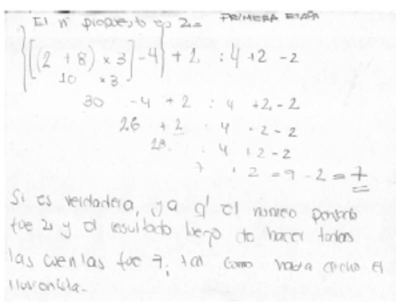
Algunos alumnos dejan por escrito que seleccionaron varios números de distintos conjuntos numéricos.

Pepe escribe una sucesión de igualdades. Expresa el número elegido de manera general con *x*, pero obtiene los resultados intermedios asignando un valor particular a *x*, siempre el mismo en la sucesión de igualdades. La grafía es correcta con respecto a la igualdad en la que el signo igual tiene un estatus de anuncio de resultado. Para expresar que el *x* puede asumir distintos valores escribe x = 1; 2; π; $\sqrt{2}$. Es posible que considere que si vale para estos números tan *raros* es garantía que vale para todos y calcule para dichos valores en forma de cálculo mental o haciendo uso de la calculadora para los números irracionales. Concluye que la afirmación es correcta porque *"al realizar la rutina me da 7"* y justifica diciendo que *"la misma fue pensada para eso"*; intuye que dar 7 tiene que ver en cómo fue construida dicha rutina, pero no puede ver cuál es la estructura de dicha construcción.



- **Escritura lineal global.** La grafía puede ser correcta o no, según conserve o no el significado de las acciones.

Romina traduce la rutina enunciada en lenguaje natural a un lenguaje numérico. Plantea una expresión con una grafía lineal global y opera a partir de la expresión de cálculo planteada. Aunque se toma alguna licencia para escribir, no se confunde en las cuentas que tiene que hacer ni en el orden en que las tiene que realizar para conservar el significado de las acciones. A partir de la misma obtiene 7. La validación es de tipo pragmática; concluye sobre la validez del enunciado a partir de un ejemplo.

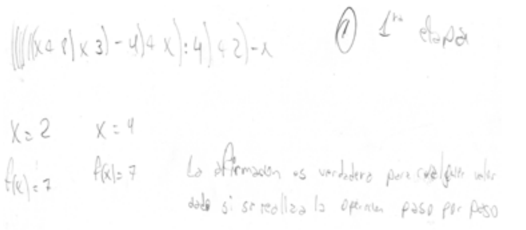


Estrategias de naturaleza algebraica. Se prevé una escritura lineal global que modelice el enunciado en una ecuación de primer grado o en una expresión algebraica de primer grado, que serán equivalentes al enunciado si se hace uso correcto de los paréntesis que establecen el orden de las operaciones.

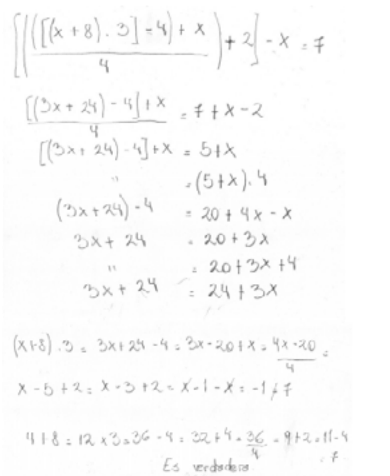
- **Modelización del enunciado a través de una ecuación.** El problema se transforma en probar que para todo número *x* resulta que la ecuación es verdadera, *x* designa un número variable.

Con respecto al planteo en ecuación se considera diferentes posibilidades en la resolución:

- **Repliegue hacia lo numérico.** Después de modelizar algebraicamente el enunciado, expresando el número pensado de manera general con *x,* se reencuentra el significado del encadenamiento operativo retornando al marco numérico, sustituyendo las variables por números. El modelo algebraico es posiblemente un modelo para hacer la cuenta. La imposibilidad de avanzar puede tener que ver, por un lado, con la falta de operacionalidad algebraica o con la dificultad de interpretar la información obtenida algebraicamente, en ambos casos *obligaría* a un repliegue a lo numérico. La validación es de tipo pragmático.

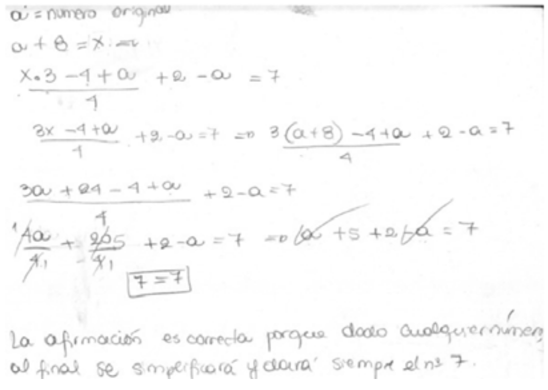


Juan traduce correctamente el enunciado en la siguiente expresión global lineal con paréntesis $((((((x+8).3)-4)+x):4)+2)-x$ y escribe *x=2 f(x)=7, x=4 f(x)=7. La afirmación es verdadera para cualquier valor dado si se realiza la operación paso por paso.* Pareciera que concluye a partir de reemplazar a *x* por dos valores diferentes y obtener 7 como resultado de la cuenta planteada.

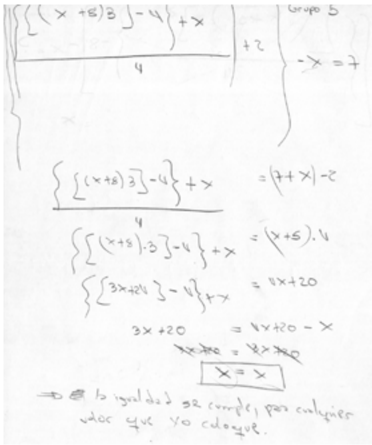


Gastón plantea una ecuación con uso adecuado de paréntesis, equivalente al enunciado dado. Resuelve la misma haciendo transposición de términos y factores de manera correcta, hasta obtener la siguiente identidad: $3x + 24 = 24 + 3x$. Pareciera que la misma no le brinda información alguna por lo que la abandona e intenta un nuevo procedimiento, pretendiendo no abandonar la formulación simbólica. Plantea una sucesión de operaciones encadenadas que intenta ser simbólica expresando el número elegido de manera general con *x* pero con un uso del signo igual de anuncio de resultado. Se confunde al realizar una suma de números enteros y obtiene como resultado -1 y escribe -1≠ 7, entonces abandona nuevamente el procedimiento para terminar eligiendo un número y realizar las sucesivas operaciones de manera encadenadas hasta obtener 7. A partir de la misma escribe "*es verdadera*". Gastón es ejemplo de un alumno que sabe modelizar un enunciado en una ecuación, sabe operar algebraicamente pero no sabe interpretar la solución de esa ecuación, seguramente porque esta no era una ecuación de las que la resolución les devolvía una única solución. Por lo que realiza un repliegue a lo numérico y valida pragmáticamente.

- **Resolución correcta de la ecuación y obtención de identidades de tipo 7 = 7, 0 = 0, 0.x = 0, x = x.** Se prevé que el dar sentido a las mismas y reinterpretalas en términos del problema implican diferentes niveles de racionalidad algebraica. Es de destacar que en muchos casos no se interpretó la solución en términos del enunciado. Es decir, se modelizó el problema a través de una ecuación**,** se trabajó correctamente en el modelo, pero no se interpretó el trabajo y los resultados obtenidos dentro del sistema modelizado para dar respuesta al problema.



Ana le llama *a* al *"número original"* y propone un cambio de variable, *x* = *a*+8. A continuación modeliza el enunciado en una ecuación lineal con dos variables, la *x* y la *a*. No trabaja sobre esta última, sino que reemplaza en la ecuación el *x* por *a*+8. Opera algebraicamente de manera correcta en el primer miembro de la ecuación, obteniendo 7=7. Interpreta que dado cualquier número al operar se simplifica por lo que siempre da 7. Su planteo es una ecuación, pero trabaja el primer miembro como una expresión algebraica que efectivamente le da 7.



Marcelo traduce el enunciado a una ecuación equivalente y resuelve realizando transposición de términos y factores, obteniendo *x*=*x*. A partir de esta identidad concluye *"la igualdad se cumple para cualquier número que yo coloque"*; no especifica si se refiere a la última igualdad a la original, a ambas o a la sucesión de ecuaciones equivalentes obtenidas.

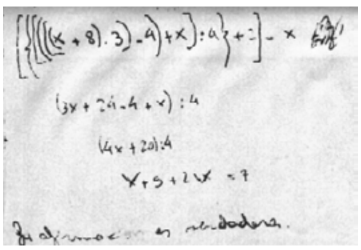
- **Resolución incorrecta de la ecuación.** El tratamiento algebraico incorrecto puede conducir a una solución de la ecuación que, como en la resolución que se muestra a continuación, no tenga solución. O puede ser que se halle un valor determinado para *x* y concluir que la afirmación es falsa. Pero también es posible que no se analice la solución en términos del problema y se reemplace en la ecuación planteada, y como es una ecuación con infinitas soluciones dicho valor la verifique y entonces se concluya que es verdadero sin analizar que lo sería para ese único valor.

Sole modeliza el enunciado en una ecuación en la que con *x* designa el número pensado de manera general.

El encadenamiento descrito en el enunciado es modelizado a través del uso adecuado de los paréntesis. La expresión obtenida es correcta y equivalente con el enunciado.

Al resolver la ecuación planteada comete errores en la manipulación algebraica, traspone de manera errónea un término lo que la conduce a obtener una igualdad falsa. A partir de la misma concluye que la afirmación no es verdadera porque el ilusionista propuso *"un absurdo"*.

- **Modelización del enunciado a través de una expresión algebraica.** Nuevamente es posible que se opere algebraicamente, de manera correcta o incorrecta.



Pedro representa la rutina del ilusionista por una expresión algebraica, que en un principio iguala a 7 pero luego lo tacha. Hace un uso adecuado de los paréntesis y la expresión es equivalente a la rutina presentada. Opera algebraicamente de manera correcta, y a partir de sucesivas operaciones obtiene 7. Concluye que la afirmación es verdadera sin explicar nada más

Frente a la variedad de estrategias, algunas de las cuales se han mostrado como representativas del trabajo de los alumnos y dan cuenta del análisis *a priori* que se realizó respecto a las mismas, el profesor tomará decisiones para la conformación de los grupos de la etapa siguiente. Seleccionará aquellas resoluciones que movilicen distintos objetos algebraicos, una ecuación y expresión algebraica o uno de estos dos objetos con alguna resolución que manifieste el intento de la búsqueda de la generalidad a través del uso de letras. También considerará como variable el tipo de tratamiento realizado a partir del objeto puesto en juego en la resolución. Según los tipos de tratamiento algebraico se ponen en evidencia los diferentes papeles que los alumnos pueden asignar al cálculo algebraico en relación con la concepción que ellos elaboran sobre la actividad algebraica y la función que le asignan al álgebra. Respecto a las estrategias aritméticas utilizadas para la resolución y para la prueba serán tenidas en cuenta las diferencias analizadas sólo en el caso que haya más de una resolución aritmética para seleccionar por el mismo grupo. El tipo de conclusión arribada, verdadera o falsa, en combinación con las estrategias utilizadas también será una variable a tener en cuenta en la selección de producciones por parte del profesor.

Segunda etapa. El profesor agrupa de a cuatro a los alumnos según los criterios de selección ya mencionados. Se anticipa que mientras más diversas sean las resoluciones más necesario será fundamentar para la elaboración de una resolución común.

Bajo la consigna de acordar se prevé que cada alumno, en tanto productor de un procedimiento, se enfrente con la necesidad de explicar su resolución y con la obligación de justificar para defender su posición e intentar convencer a los demás de la eficacia de su producto. La necesidad de optar obliga a considerar los distintos tipos de procedimientos como objeto de trabajo. Los alumnos se verán obligados a elegir o a descartar y recurrirán a criterios que tengan que ver con la pertinencia del procedimiento o de la justificación o a algunos otros más personales referidos, por ejemplo, a si es más fácil o más difícil. Seguramente no serán de este tipo los argumentos convincentes para hacer renunciar a otros alumnos a sus propias producciones, por lo que se pondrán en juego el tipo de justificaciones que se pretenden. Estas negociaciones están sujetas también a las condiciones que impone el funcionamiento social del grupo (alumnos líderes, o desvalorizados) por lo que el grado de adhesión al procedimiento y justificación finalmente elegido no será el mismo para todos los alumnos del grupo por lo que se considera oportuno el planteo de la siguiente etapa.

Tercera etapa. Se formula la hipótesis según la cual el trabajo de discusión en los distintos grupos en la segunda etapa conferirá un cierto ropaje algebraico a las producciones grupales de esa etapa.

El objetivo de la tercera etapa es la confrontación entre distintas producciones algebrizadas, estableciendo diferencias y similitudes, obligando a justificar para sostener lo que se trae como producto final de un grupo al que se pertenece, lo que no garantiza igual grado de implicación y adhesión de todos sus integrantes. En esta etapa se pretende dar una nueva oportunidad, que surja más de una resolución posible, que se establezca que distintos objetos algebraicos permiten diseñar una prueba a partir de crear un modelo para un problema específico; que se reflexione que a partir de un mismo modelo, con un tratamiento algebraico diferente, pueden resultar estados finales aparentemente distintos y que es necesaria la significación de los estados finales en términos de la resolución algebraica para poder volver al problema y dar respuesta al mismo.

Para la organización de los grupos de esta etapa nuevamente el profesor deberá seleccionar entre las producciones diferentes de los distintos grupos de la segunda etapa. Será necesario que identifique diferencias entre los modelos planteados y las justificaciones dadas por los grupos. Los nuevos grupos serán de seis alumnos que provienen de tres grupos diferentes de la segunda etapa

Como hipótesis se enuncia que esta nueva instancia de interacción a partir de las producciones grupales de la etapa anterior, bajo la consigna de acordar un procedimiento de resolución entre los propuestos o eventualmente optar por un procedimiento nuevo, les obligará a afinar las justificaciones que se pretenden.

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 120-135

Consideramos que los integrantes del nuevo grupo se mantendrán implicados al tener que confrontar y acordar a partir de producciones propias, en una posición que combina la evaluación con la validación. Se tiene la oportunidad de poner a prueba la producción de su grupo como marco de análisis. Las relaciones construidas en el grupo en la etapa anterior operarán de manera distinta en cada alumno y éstas se pondrán en juego durante la interacción. La producción en esta instancia será, seguramente, cada vez más algebrizada, logrando un conocimiento sobre los objetos y los procedimientos enriquecidos a partir de las justificaciones. Posiblemente no sean en el mismo grado en todos los grupos o quizás no se utilice el mismo modelo, por lo que vale la pena el trabajo colectivo de la siguiente etapa.

Cabe destacar que en nuestro trabajo experimental las dos primeras etapas resultaron muy fértiles para la concreción de los objetivos propuestos. Pero diversas causas, que no se presentan en este artículo, hicieron que la etapa tres no resultara tan productivas como lo previsto.

Cuarta etapa. El debate colectivo a partir del trabajo realizado a lo largo del dispositivo didáctico da lugar a la negociación pública sobre distintos aspectos puestos en juego en la resolución del problema. A saber, el poder de la herramienta algebraica como herramienta de prueba, los distintos modelos algebraicos que admite el problema, los estados finales obtenidos a partir del trabajo realizado en cada modelo, la interpretación algebraica de esos estados finales, las equivalencias de los mismos a partir de tener en cuenta la denotación de los objetos que se obtienen en las sucesivas transformaciones. En esta etapa es fundamental el rol del docente; es importante recuperar las producciones de los grupos y establecer relaciones entre ellas y el saber cultural.

Sintetizando. A partir de la selección de un problema se definieron *a priori* las componentes de análisis del mismo y se estudiaron las resoluciones esperadas y las relaciones que las sostienen. Este análisis nos permitió, por un lado, precisar la relación entre el *sistema de conocimientos* del alumno que nos ocupa, el problema seleccionado y el álgebra como herramienta de modelización y validación y, por otro lado, afinar la formulación de nuestras hipótesis de trabajo para la elaboración del dispositivo didáctico. Luego, nutrido por el trabajo anterior, se diseñó un dispositivo didáctico y se realizó el análisis *a priori* del mismo. Se tendió a elaborar un conjunto de observables que nos permitiera leer las estrategias desarrolladas por los alumnos y las evoluciones de las mismas a partir de las interacciones entre pares en términos de los conocimientos puestos en juego, durante la implementación del dispositivo didáctico. Para enriquecer este estudio se presentaron las producciones de los alumnos de la etapa experimental.

La etapa de experimentación: Nuestra clase de matemática

La etapa de experimentación es aquella en la que el dispositivo didáctico diseñado para esta investigación se implementa con los estudiantes en un aula y con un docente. En primer lugar, vamos a presentar como se pensó la implementación de la experimentación, con qué criterios se seleccionó el docente y cómo se estableció la comunicación con él. En un segundo momento, se ofrecerán datos sobre la clase en donde se llevó a cabo la implementación y se precisará la metodología de observación utilizada.

- **La selección del docente.** Se concibió la experiencia a cargo de un docente con formación en didáctica de la matemática. Consideramos importante compartir con el mismo no sólo la posición epistemológica sobre la matemática, sino también la concepción de enseñanza y de aprendizaje y el modelo docente al que responde, para que éste pudiera interpretar sin inconvenientes el espíritu de la propuesta. Bajo esta consigna se seleccionó una profesora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas Físico Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto que accedió a participar de la experiencia.

- **La comunicación con la docente seleccionada.** En la etapa previa a la implementación de la propuesta nos hemos reunido con la profesora para comunicarle la secuencia que pondría a funcionar en una clase a su cargo. En colaboración realizamos un análisis didáctico del problema y puntualizamos los aspectos que buscábamos indagar en este tramo de nuestra investigación, consideramos primordial que asumiera los objetivos propuestos. La docente dispuso de los elementos del análisis *a priori*, tales como, la variedad de estrategias posibles para abordar la situación, las distintas maneras de resolverla. Nuestra intención era que la docente pudiera leer las resoluciones y las reflexiones de los alumnos en términos de un conjunto de conocimientos puestos en juego. Pretendíamos que contara con un respaldo de posibilidades que orientaran sus intervenciones en dirección hacia la producción de los conocimientos que se apuntaban pero que le dejara espacio para tomar sus propias decisiones didácticas en función de lo acontecido en el aula, dándole la posibilidad de actuar en función de lo que iba advirtiendo de las acciones de sus alumnos.

- **La implementación de la experiencia.** La experiencia se llevó a cabo en una clase de veinticuatro alumnos de Calculo I para la carrera de Microbiología, faltando pocos días para finalizar el segundo cuatrimestre de un primer año de carrera. A los alumnos se les comunicó que esta clase formaba parte de una investigación y accedieron a la propuesta con un alto grado de compromiso.

- **Metodología de observación.** La clase fue totalmente grabada en audio, disponiendo de un grabador por grupo de trabajo. Además, se recogieron todas las producciones escritas de las distintas etapas del desarrollo de la experiencia y se realizó una crónica de la clase a partir de los datos obtenidos por la observación directa. Posteriormente se registró por escrito cada instancia de la clase a partir de la desgrabación del material obtenido en audio.

Análisis *a posteriori* de la experiencia. El rol de las interacciones en la producción de conocimiento

El análisis *a posteriori* nos permitió estudiar el proceso de producción de conocimientos en relación con la dimensión herramienta de modelización y validación del álgebra en el marco de la situación planteada. En particular se estudió cómo las interacciones entre los alumnos, con la intervención docente, juegan un papel en la evolución de sus conceptualizaciones y en la adquisición de estos aspectos del álgebra. El análisis *a priori* del dispositivo didáctico realizado nos provee de un conjunto de observables que fueron primordiales en la interpretación de la información.

A continuación presentaremos los conocimientos que se fueron desprendiendo del análisis realizado, intentando una generalización que trascienda el ejemplo específico que representó esta experiencia en particular.

En la introducción nos planteábamos algunos interrogantes. Algunos referidos propiamente al trabajo en interacción con la producción de un compañero, otros al papel que tiene la intervención docente en las interacciones entre pares y otros específicamente al conocimiento matemático en juego en situaciones de interacción entre pares. Después del profundo análisis realizado estamos en condiciones de precisar algunas cuestiones al respecto.

Respecto del trabajo en interacción con pares

En el inicio de nuestra investigación nos propusimos precisar las condiciones bajo las cuales las interacciones entre pares podrían producir avances en los aprendizajes individuales. Este trabajo nos ha permitido delimitar algunas condiciones para pensar en características necesarias de las situaciones para apuntar a favor de la evolución buscada.

- ♦ El dispositivo de conformar grupos para promover la interacción con la producción *del otro*, bajo la consigna de producir consenso, resulta fértil bajo la condición de producciones muy diferentes y de un cierto grado de incertidumbre de cada uno acerca de su propia producción.

- Algunos errores conceptuales de los alumnos son resistentes a las discusiones grupales y se llegan a acuerdos a pesar de diferencias sustanciales. La intención de acordar en un *producto* opacaría los desacuerdos durante el *proceso*, especialmente cuando éstos no tienen relación directa con el conocimiento que se persigue tras el acuerdo.
- Cuando se conjugan problemas de distinta índole técnica, el dispositivo de la interacción entre pares no es motor suficiente para lograr avances y el objetivo principal se diluye ante la necesidad de acordar cuestiones técnicas intermedias.

A continuación vamos a explicitar algunos efectos de la interacción con la producción *del otro* que hemos podido identificar bajo la condición de una primera instancia de trabajo individual y la consigna de acordar.

- Permite desplegar lo individual, a veces oculto hasta para el propio productor de una *declaración.* Cuando el alumno está, de algún modo, obligado a explicitar, a dar una fundamentación de su trabajo, se enfrenta más profundamente con lo que verdaderamente hizo o sabe.
- Actúa como *devolución* del problema. Algunos alumnos recién en esta etapa entienden o profundizan su conocimiento sobre de qué problema realmente se trata o es posible que el problema se transforme en uno nuevo porque evolucione la visión que tiene el alumno sobre el mismo.
- Retroacciones al propio trabajo. El alumno revisa, re-elabora su producción a partir de las discusiones y explicitaciones generadas en la interacción. El aporte de unos modifica, en algún sentido, el sistema de decisiones de otros y contribuye a profundizar el conocimiento sobre los objetos puestos en juego y los sentidos de los mismos.
- Desde el punto de vista del investigador, permite conocer más acerca de las relaciones puestas en juego en la resolución escrita. Podemos asegurar sobre lo parcial de las producciones escritas, tanto individuales como grupales, en relación con el conocimiento de quien o quienes lo escriben:

- Muchas veces las resoluciones escritas están basadas en *declaraciones* que los alumnos no pueden justificar y esto sólo es puesto en evidencia en el trabajo con *el otro*, a partir de querer llegar a un acuerdo, buscando las razones para convencer.

- Producciones escritas similares pueden corresponder a conocimientos diferentes de cada alumno: al interactuar con *los otros* se explicitan las relaciones puestas en juego, se producen distintas evoluciones lo que nos darían la pauta que el punto de partida era en realidad diferente.

- Las producciones escritas grupales conllevan distintos grados de adhesión de los miembros del grupo, dependería de cuánto se hubieran involucrado los alumnos en el momento del trabajo en interacción. Esto puede obedecer a la distancia entre el marco conceptual de trabajo individual y el del trabajo grupal.

Respecto del papel de la intervención docente

En la introducción de esta investigación nos planteábamos precisar el papel del profesor como sostén de las interacciones entre pares, sus limitaciones y sus libertades para actuar frente a las producciones que emerjan en la interacción.

Nuestro trabajo nos permitió precisar algunos aspectos de la intervención docente que favorecen la evolución de aprendizajes individuales a partir del trabajo en interacción entre pares.

- Las intervenciones del docente en un grupo permiten que los alumnos no se escapen de la situación. Basándose en las producciones de los alumnos, distintas acciones del profesor permiten un retorno reflexivo permanente sobre la acción: comparar y coordinar distintas producciones, señalar contradicciones, reformular algo dicho por un alumno para que se haga perceptible para todos, exigir no evadirse de entender una cosa porque se entendió otra, repreguntar en el caso que esto no surja dentro del mismo grupo, hacer explícito procedimientos para reorientar el trabajo en caso de ser necesario, recordar cuestiones que hayan surgido en el grupo en un momento previo, habilitar los procedimientos de todos los alumnos, activar conocimientos que algún alumno disponga y que no fueran activados por la discusión, hacer síntesis parciales de lo que se vaya avanzando en el trabajo en el grupo, demandar formas de validación, no resignar a que se establezcan acuerdos rápidos y se tomen decisiones sin análisis.

- Los momentos de intervención docente permitieron la emergencia de los conocimientos de los alumnos que de otro modo permanecerían en un ámbito más privado. En una clase, este tipo de episodios permiten a un docente tomar datos para decidir futuras acciones. Desde el punto de vista del investigador son muy ricos por la información que brindan.

Cuando las interacciones entre pares se establecen sin un docente que vigile la pertinencia matemática de la discusión o si las diversas intervenciones que realice resultasen ser muy locales que no lleguen al meollo de la dificultad, los procesos de producción pueden llegar a transcurrir de manera un tanto *accidentada*. La realidad de una clase hace imposible que el docente esté presente, al menos en todo momento, en cada grupo que trabaja. Esto permite aventurarnos a pensar en una clase con más de un docente. Quizás una idea un tanto alocada o ilusoria en la escuela media, pero no así en instituciones universitarias donde es posible generar condiciones para contar con más de un ayudante por comisión de práctico.

Respecto del conocimiento matemático: la evolución de la prueba pragmática a la prueba intelectual

En el problema propuesto en el trabajo experimental los alumnos debían decidir sobre la verdad de un enunciado -que se predica para todos los números- y justificar la decisión tomada. Como ya lo hemos señalado, el álgebra aparece como una herramienta necesaria tanto para la toma de decisión como para la validación.

Inicialmente nos planteábamos qué entienden los alumnos por: *el ilusionista* le dice a un participante diga *un número*. ¿Entienden que es *para cualquier número*? ¿Es equivalente para ellos decir *para cualquier número* que *para todo número*?

Nuestro trabajo nos permitió observar los conocimientos que los alumnos tienen acerca de la validación de una afirmación de este tipo, a saber: a) Probar con *muchos* números alcanza como prueba. b) Si da para números *feos*, *grandes* es más seguro que de para cualquiera. c) Clasificar los números en clases y tomar uno de cada clase es probar para todos. d) Cuando el tratamiento algebraico no arroja resultados, probar con un número grande parece ser una prueba alternativa distinta a probar con números como el 1 o el 2. e) Estar de acuerdo en pasar a letras, traducir al lenguaje algebraico y operar algebraicamente de manera correcta no siempre es suficiente para que éste trabajo se constituya en una prueba.

Después del análisis realizado podemos afirmar que el dispositivo de hacer interactuar producciones *bien diferentes*, con distintas estrategias empleadas en *la prueba*, bajo la consigna de acordar, resultó fértil para que los alumnos vayan *moviendo* algunos conocimientos que tienen acerca de la validación de una afirmación que se predica para cualquier número. Permitió que algunos pudieran ir delimitando el alcance de la verificación para algunos casos particulares y estableciendo diferencias entre verificar y demostrar. A algunos alumnos les permitió re-conceptualizar el rol asignado al *caso particular*, a otros alumnos, resignificar el papel de la modelización algebraica, y a otros ir *moviéndose* entre estos dos extremos.

Para finalizar, queremos destacar el valor de este estudio, que si bien puso foco en un proceso particular y, en los distintos matices y vericuetos de un proceso de construcción individual y grupal de conocimiento, a partir del mismo pudimos precisar las condiciones bajo las cuales las interacciones entre pares, con intervención y sostén docente, colaboran en la evolución de las conceptualizaciones de los alumnos y en la adquisición de nuevos sentidos para el trabajo algebraico.

Notas

[1] Esta investigación se enmarca en una tesis de maestría en Didáctica de la Matemática (Buffarini, 2005); la misma fue dirigida por la Dra. Carmen Sessa y se realizó en la Universidad Nacional de Río Cuarto.

[2] El concepto de *medio* incluye tanto la problemática matemática que el alumno enfrenta, como el conjunto de relaciones, fundamentalmente matemáticas, que se van modificando a medida que el alumno construye conocimientos a partir de enfrentarse a las diferentes situaciones que conforman la problemática, lo cual modifica la realidad con la que interactúa.

[3] Extraído de "Ejercicios de Matematización: El Prestidigitador", de la tesis de doctorado en Didáctica de la Matemática de Brigitte Grugeon (1995).

[4] Balacheff (1988) considera pruebas pragmáticas de diferente nivel según el grado de generalidad involucrado: a) Si se valida la afirmación después de verificarla para algunos casos particulares; b) si se valida la afirmación con un caso particular no *especial* o c) operando sobre un objeto concreto al que considera representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación.

[5] Vergnaud (1987) señala que el igual aritmético no es simétrico ni transitivo, cuando los alumnos deben resolver un problema a través de, por ejemplo, los cálculos 23 + 31 = 54, 54 - 14 = 40, ellos escriben 23 + 31 = 54 - 14 = 40.

Referencias

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.) *Mathematics teacher and children* (pp. 216-235). Inglaterra: Open University Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.* 7 (2), pp. 33-115.

Brouseau, G. (1982). Ingénierie didactique. D' un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. *Deuxième Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*. Olivet, Francia.

Buffarini, F. (2005). La dimensión del algebra como herramienta de modelización y validación: las interacciones como medio de su evolución. (Tesis de maestría). UNRC, Argentina.

Grugeon B, (1995). Etude des rapports personnels et des rapports institutionnels a l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d`enseignement: BEP et première G (These de doctorat). Université de Paris VII, Francia.

Lins, R., Rojano, T., & Bell, A. (2001). The Production of Meaning for Algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields. En R. Sutherland (Ed.), *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G., Cortes, A., & Favre Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles : problèmes epistemologiques et didactiques. In G. Vergnaud, G. Brousseau, M. Hulin (Eds), *Didactique et acquisition des concepts scientifiques*. *Actes du colloque de Sèvres.* (pp.259-288). Grenoble, Francia: Editions La Pensée Sauvage.