CONTEXTOS DE EDUCACION

Este artículo pertenece a la Revista Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 27-40
y fue descargado desde: www.hum.unrc.edu.ar/ojs/index.php/contextos

ARGUMENTOS DE PROFESORES DE MATEMÁTICA PARA EXPLICAR MODELOS ALEATORIOS

MATH TEACHER´S ARGUMENTS TO EXPLAIN RANDOM MODELS

Liliana Tauber

Universidad Nacional del Litoral, República Argentina
estadisticamatematicafhuc@gmail.com

Palabras Clave

Ideas estocásticas fundamentales

Formación de Profesores de Matemática

Aleatoriedad

Modelo

Resumen

En el eje de Estadística y Probabilidad de los nuevos Diseños Curriculares de Matemática para el Nivel Secundario, se promueve el trabajo con datos y con modelos desde la construcción de un sentido crítico de los mismos. Como consecuencia, surge la necesidad de formación de los profesores en Probabilidad y Estadística, la cual ha sido escasa en las últimas décadas. Con el objetivo de tener fundamentos didácticos para elaborar propuestas de formación basadas en las dificultades de comprensión de las ideas estocásticas fundamentales que evidencian los docentes, es que analizamos los argumentos que, profesores de matemática en ejercicio, han brindado a una actividad que se centra en dos de estas ideas: aleatoriedad y modelo. Nuestros resultados muestran una mezcla de argumentos, en los que se pueden percibir una serie de concepciones, algunas de las cuales se han detectado a lo largo de la historia. Estos resultados han servido de fundamento para elaborar propuestas de formación en el área para profesores en ejercicio.

Key words

Fundamental stochastic ideas

Teacher training

Randomness

Model

Abstract

On the subject of Statistics and Probability of the new Curricular Designs of Mathematics for the Secondary Level, work is promoted with data and models from the construction of a critical sense of such models. As a consequence, the need arises for teacher training in Probability and Statistics, which has been scarce in recent decades. With the aim of having didactic foundations to develop training proposals based on the difficulties of comprehension of the fundamental stochastic ideas evidenced by teachers, we analyzed the arguments that teachers of Mathematics in practice have given to an activity that focuses on two fundamental ideas: randomness and model. Our results show a mixture of arguments, in which a series of conceptions can be perceived, some of which have been detected throughout history. These results have served as a basis for developing training proposals for teachers in service.

Cita sugerida: Tauber, L. (2019). Argumentos de profesores de matemática para explicar modelos aleatorios. *Contextos de Educación* 26 (19): 27-40

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 27-40

INTRODUCCIÓN

Si realizamos una revisión de la historia de las ideas estocásticas (cuando nos referimos a la estocástica hablamos de ideas probabilísticas y estadísticas relacionadas) veremos que la misma está repleta de concepciones contradictorias o erróneas pero que sirvieron como disparadores para el análisis y definición de las mismas. Estas concepciones nos permiten ver que la intuición estocástica puede engañar hasta a la persona más experta, ejemplos de ello pueden encontrarse en Székely (1986) y Gutiérrez Cabriá (1992), entre otros, y las mismas surgen también cuando nuestros alumnos se involucran en un proceso gradual de construcción de estas ideas. Esto implica que el profesor de Matemática debería ser consciente de esta problemática, para poder comprender los razonamientos de sus estudiantes.

Existen diversos estudios que analizan las concepciones erróneas de profesores y estudiantes de distintos niveles educativos asociadas a distintas ideas estocásticas fundamentales (Green, 1983; Moreno, Cardeñoso y González, 2014; Batanero, Gómez, Serrano y Contreras, 2012, Tauber y Olesker, 2014, entre otros). Entre otras concepciones, estos trabajos han brindado información sobre los argumentos que utilizan las personas respecto de la idea de aleatoriedad. En este sentido, nuestro trabajo aportará información complementaria a la de esos estudios, que han trabajado con adolescentes o con profesores de nivel primario, ya que trabajamos con profesores de Nivel Secundario y Superior.

A continuación describimos el marco teórico que adoptamos en nuestro trabajo y para ello, primero indicaremos lo que consideramos por ideas estocásticas fundamentales (en lo que sigue designaremos con IEF).

IDEAS ESTOCASTICAS FUNDAMENTALES

La concepción de ideas fundamentales se atribuye a Bruner (1960), quien indica que en educación (disciplinar) se deberían seguir las líneas principales que ofrece la ciencia asociada. Una tesis básica de esta concepción, según Goetz (2008), radica en que es posible enseñar los principios básicos de una ciencia independientemente de la edad y del origen social de los destinatarios. Este enfoque se refiere al contenido de la Educación Estocástica (en nuestro caso) y también a la actitud crítica, que es la componente principal para hacer estadística. En este sentido, la Educación Estocástica debe ser una copia no sesgada de la ciencia estadística. Por supuesto, el nivel de la educación debe ser diferente al nivel de la ciencia, pero esto no debería significar un obstáculo, sino un reto para que la Didáctica de la Estadística procure identificar los contenidos y los métodos típicos de la ciencia.

Además de estas ideas fundamentales, cuando planificamos secuencias didácticas, deberíamos tener en cuenta las creencias de las personas. Así, Goetz (2008), indica que se pueden distinguir dos tipos de creencias: normativas y descriptivas. Las primeras cumplirían una función similar a la de las ideas estocásticas fundamentales, mientras que las segundas, indican las creencias individuales relacionadas con los contenidos cognitivos. Por ejemplo, podemos hablar de creencias descriptivas cuando un alumno valora la probabilidad de la ocurrencia de un evento condicionado a otro a través de la probabilidad asociada a un evento simple, sin considerar el evento que condiciona. Según Goetz (2008), una de las claves para descubrir las creencias es analizar los errores al resolver una determinada tarea, indicación que tendremos en cuenta al analizar los resultados.

En investigaciones previas (Tauber, 2010; Tauber, 2017), realizadas con estudiantes de nivel superior y profesores de matemática, hemos encontrado diversos tipos de creencias asociadas con el tratamiento de la estadística o con la dificultad de los conceptos estocásticos. Por ejemplo, una gran proporción de profesores de matemática de nivel medio (70% de 2800 profesores encuestados -Tauber, 2017-), deciden no desarrollar conceptos estocásticos porque no se sienten seguros a la hora de resolver problemas; otros, plantean que la incertidumbre en los resultados estocásticos les provoca ansiedad por el hecho de no tener un único resultado. Así, podemos concluir que estas creencias influyen en los profesores a la hora de enseñar o de planificar la enseñanza de Estadística.

En consecuencia, consideramos que es necesario distinguir cuáles son las ideas estocásticas fundamentales que deberían desarrollarse *más profundamente* en la enseñanza formal para lograr que nuestros alumnos lleguen a adoptar un sentido crítico frente a la información atravesada por la aleatoriedad. Es así que consideramos que las ideas *más* relevantes que nuclean redes complejas de conceptos estocásticos son aquellas ideas asociadas a: la aleatoriedad, la variación, la distribución, la probabilidad y el muestreo. Asociada a las ideas de aleatoriedad y de distribución, podemos ubicar la de modelo aleatorio, considerando que la primera es transversal a todas las demás, de allí su importancia a la hora de detectar los razonamientos que utilizan las personas cuando se enfrentan a situaciones que implican la aleatoriedad. Para un análisis más exhaustivo de las ideas estocásticas fundamentales consultar Batanero (2004) y Tauber, Cravero, Redondo (2013b).

SIGNIFICADOS HISTORICOS ASOCIADOS A LA IDEA DE ALEATORIEDAD

A lo largo de la historia se han dado diversas interpretaciones sobre las ideas de aleatoriedad y de azar, inclusive actualmente no existe una definición sencilla para dichas ideas (Gutiérrez Cabriá, 1992). Es por ello que nos interesa referirnos a algunos de estos significados, para poder interpretar las argumentaciones que dan los profesores. Para una descripción más amplia de los mismos se puede consultar Batanero (2015).

Hasta comienzos de la Edad Media, se usaron dispositivos aleatorios para predecir el futuro o tomar decisiones sin una idea científica o formalizada de la aleatoriedad. Así, la misma se asoció con la causalidad y se concibió como el opuesto de algo que tiene causas conocidas (Gutiérrez Cabriá, 1992). En los primeros estudios formales sobre probabilidad, se asoci*ó* la idea de aleatoriedad a la de equiprobabilidad, debido a que los mismos se centraron en el análisis probabilístico de los juegos de azar cuyos resultados elementales eran equiprobables. A finales del siglo XIX, los desarrollos teóricos de inferencia estadística permitieron la distinción entre un proceso aleatorio y una secuencia de resultados aleatorios. Aunque la aleatoriedad es una propiedad de un proceso, sólo se puede valorar si el proceso es aleatorio o no mediante la observación de sus resultados. Esta discusión llevó a la formalización del concepto de aleatoriedad, aunque también coexisten distintos enfoques, dentro de los cuales destacamos el que propone que, una secuencia debería ser aleatoria si no puede ser codificada en una forma más simple y la ausencia de patrones es su característica esencial. El número mínimo de signos necesario para codificar una secuencia particular brinda una escala para medir su complejidad, por lo tanto, esta definición permite una jerarquía en los grados de aleatoriedad para diferentes secuencias.

Como podemos apreciar, la idea de aleatoriedad implica otras ideas asociadas, cada una de ellas con distintos niveles de complejidad a la hora de brindar un significado de las mismas. Esta complejidad queda evidenciada en distintos trabajos sobre la comprensión de la aleatoriedad en futuros profesores y en profesores en ejercicio (Batanero, Gómez, Serrano y Contreras, 2012; Moreno,Cardeñoso y Gonzalez., 2014; Tauber, Cravero y Redondo, 2013a), en los que se muestra la confusión de los sujetos de estudio entre, por ejemplo, la equiprobabilidad con la independencia, o la creencia de que todos los sucesos aleatorios son equiprobables. Resultados similares han sido encontrados en estudios realizados con estudiantes de nivel Primario y Secundario (Olesker, 2014; Tauber y Olesker, 2014).

Estudios, como el de Chernoff (2009), encontraron que los sujetos podrían razonar desde tres interpretaciones diferentes asociadas al concepto de espacio muestral: (a) considerando los cambios de cara a cruz en una secuencia de 5 lanzamientos de una moneda; (b) considerando la longitud de la racha más larga, y (c) considerando los cambios y la racha más larga conjuntamente. Así, concluye que los razonamientos aparentemente incorrectos respecto a la aleatoriedad podrían ser consistentes con dichas interpretaciones *y no serían debidas a falta de razonamiento probabilístico, sino al uso de probabilidades subjetivas personales.*

A continuación, presentamos los resultados de nuestra investigación, que tiene como objetivo general complementar los estudios comentados y específicamente, pretende comparar algunos resultados con los obtenidos por Batanero, Gómez, Serrano y Contreras (2012) y por Green (1983).

METODOLOGÍA

Hemos trabajado con una muestra accidental de 46 profesores de matemática de nivel secundario y superior, que asistieron a un curso que otorgaba créditos dentro del plan de una Licenciatura en Educación Matemática. El 78 % de los sujetos participantes eran mujeres y todos habían realizado un curso de Probabilidad y Estadística en sus carreras previas.

Los datos se recolectaron a partir de las respuestas dadas por los sujetos a una tarea adaptada del cuestionario de Green (1983). El objetivo de elegir esta tarea, la cual también fue utilizada por Batanero, Gómez, Serrano y Contreras (2012), fue el de realizar comparaciones entre las respuestas dadas por los adolescentes (12-16 años) que fueron sujetos de estudio de Green y por los profesores de Educación Primaria, que fueron los sujetos de Batanero et al. Es por este motivo que a continuación describiremos los resultados obtenidos considerando la misma categorización realizada en Batanero, Gómez, Serrano y Contreras. (2012).

LA TAREA

A la tarea propuesta por Green (1983), hemos agregado cuatro razonamientos expresados por alumnos de Nivel Secundario a quienes se les había propuesto la misma tarea (Cuadro 1). Esto nos permitió pedir a los profesores que elijan el razonamiento que más se acercaba a lo que ellos habían expresado, fundamentando su elección. Esta segunda parte tenía por objetivo detectar contradicciones u otros argumentos, pues permitía comparar con lo que los profesores habían expresado en la parte 1 de la tarea. Cabe aclarar que en este trabajo presentamos solamente los resultados de las respuestas a la Parte 1, por razones de espacio no haremos referencia a los resultados de la segunda parte.

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 27-40

Cuadro 1. Tarea propuesta a los profesores de Matemática (adaptada de Green, 1983)

El profesor de estadística pidió a Clara y a Luisa que lanzaran cada una de ellas, 150 veces una moneda y que anotaran si sale cara (C) o cruz (+). Estos son los resultados de Clara y Luisa:

Clara: c+c++cc++cc+c+c++c++c+ccc+++ccc++c++c+c+c++cc+ccc+c+c+cc+++cc++c+c++cc+c++cc+c++c-c+cc+c+++c++cc++c++c+c+cc+c++cc+c+c++ccc+cc++c+c++cc+++c+++c+c++ccc++

Luisa: +cc+++c++++c+cc+++cc+cc+++cc+ccc+++c++++++c+c+c+c++++cccccc+ccc+c+cc+ccccc+ccc++c-cc+c+ccccccccc++c+ccccccc+++++cccc++c+c+cc+cc+cc++++++c+cc++ccc++ccc+

Una de las chicas lanzó la moneda como dijo el profesor, anotando los resultados; pero la otra hizo trampas; no lanzó la moneda sino que inventó los resultados.

PARTE 1

1. a. ¿Cuál de las chicas piensan que hizo trampas?

1. b. Explica el razonamiento que seguiste para tomar la decisión anterior.

PARTE 2

A continuación te presentamos los razonamientos de algunos estudiantes que resolvieron esta actividad. Selecciona el que te parezca más adecuado e indica en qué te basaste para elegirlo.

Razonamiento 1: Luisa hizo trampas porque la probabilidad de que salga cara o cruz, al lanzar una moneda, es del 50%. Por lo tanto, en 150 lanzamientos estimaríamos los valores más cercanos a la media (75) y en este caso es 78 el valor más cercano.

Razonamiento 2: Clara hace trampas porque aparece de forma más aleatoria, alternando las "+" y las "C". En cambio lo de Luisa parece más real, ya que hay más continuidad de resultados muchos "+" y "C" seguidos.

Razonamiento 3: Clara hace trampas porque en su grupo de resultados no hay más de tres resultados iguales seguidos, y puede haber más de tres resultados iguales seguidos porque hay la misma probabilidad de que salga una cruz o una cara.

Razonamiento 4: Luisa hace trampas porque sus resultados se repiten mucho durante todas las veces, es decir, por ejemplo "cruz" le sale muchas veces, creo que hay más probabilidad que salga también cara, que se igualen tanto cara como cruz.

2. a. Indica el número de Razonamiento elegido: ______   2. b. Justifica tu elección: _______

Estrategias de análisis que podrían utilizarse para resolver la Parte 1

Las ideas estocásticas fundamentales que atraviesan esta tarea son las de aleatoriedad y de modelo. Esta última permitirá realizar un análisis de la situación de tal manera que se pueda explorar las secuencias construidas por las dos chicas desde distintos modelos intuitivos o formales. Es así que, considerando distintos modelos se podrá llegar a conclusiones diversas, unas más adecuadas que otras. A continuación, describiremos los modelos más relevantes que podrían surgir del análisis de la situación planteada en la Parte 1(para una discusión más detallada consultar Batanero, 2001):

1. Utilizando el Modelo Binomial: Se podrían comparar el número de caras y de cruces obtenidos por cada chica con lo que se esperaría para un modelo binomial con parámetros: n = 150 y p = 0,5. En este caso además, se debería establecer la condición inicial de que la moneda no está cargada y permitiría utilizar un enfoque centrado en la aproximación de la frecuencia empírica a la teórica bajo el supuesto de trabajar con un modelo binomial.

2. Considerando que cada chica anota los resultados cada dos o tres repeticiones: Se comparan las frecuencias observadas con las esperadas (de manera aproximada) según si deciden anotar cada dos o tres resultados. Esta resolución se estaría basando en un modelo asintótico, ya que las frecuencias esperadas consideradas son aproximadas y estaría asociado al modelo 4 que describimos más adelante.

3. Considerando las distribuciones de la longitud de cada racha en los 150 lanzamientos: Se comparan las distribuciones de frecuencias de la longitud de las rachas obtenidas en las secuencias de ambas alumnas. Otra posibilidad es considerar la longitud de la racha más larga. Según Schilling (1990), el valor esperado de la longitud de la racha más larga en *n* ensayos de lanzar una moneda tiende a $\log_2 n - 2/3$. En esta situación: $\log_2 (150) - 2/3 = 6,56$ Entonces la longitud esperada de la racha más larga es cercana a 7, de modo que el resultado de Luisa es más cercano al valor teórico que el de Clara.

4. Considerando métodos inferenciales: En este caso, se podría utilizar una prueba chi-cuadrado de bondad de ajuste, para analizar si cada secuencia se ajusta al modelo binomial o al modelo considerando cada dos o cada tres resultados. También se podría utilizar una prueba de aleatoriedad o de rachas.

Considerando estas formas de análisis, en las tres últimas podemos llegar a la conclusión de que es más probable de que sea Clara quien hace trampas, aunque en el primer caso, no se presentan evidencias suficientes como para indicar que sea Luisa la tramposa. En conclusión, considerando todas las pruebas posibles, existe mayor evidencia para considerar que Clara es quien hace trampas.

RESULTADOS Y DISCUSION

Resultados asociados a la decisión respecto de quien hace trampas

Inicialmente consideramos la elección que realizaron los profesores respecto de cuál de las chicas parece que hace trampas (Tabla 1). Considerando que a partir del análisis descripto antes, es posible indicar que es Clara la que miente, podemos observar que la mitad de los profesores toma una decisión que no es la adecuada. Si comparamos con los resultados presentados en los estudios de Batanero, Gómez, Serrano, y Contreras (2012) y Green (1983), vemos que nuestros resultados han sido mejores, en proporción, aunque considerando que los sujetos de Green eran adolescentes de entre 11 y 16 años y los sujetos de Batanero et. al eran estudiantes de profesorado de Nivel Primario, esperábamos obtener una mayor proporción de respuestas adecuadas.

© 2019 Departamento de Cs. de la Educación, Facultad de Cs. Humanas, UNRC, Argentina.
Contextos de Educación Año 19 - Nº 26. Pp 27-40

Tabla 1. Respuestas asociadas a la decisión de quién hace trampas

¿Quién hace trampas?	Profesores de matemática (Tauber - n=46)		Futuros profesores de primaria (Batanero, et. al, 2012 – n=157)		Alumnos de 11 a 16 años (Green, 1983 – n=2930)	
	N° docentes	%	N° alumnos	%	N° alumnos	%
Clara (*)	23	50	42	26,8	996	34
Luisa	23	50	89	56,7	1934	66
No sabe	0	0	17	10,8	0	0
Ninguna	0	0	1	0,6	0	0
No responde	0	0	8	5,1	0	0

(*) NOTA: Elegir a Clara como la tramposa sería lo más adecuado

Argumentos utilizados por los profesores para fundamentar su elección

Una vez descripto el porcentaje de respuestas en relación a la elección que hacen los profesores respecto de la chica que pareciera que miente, realizamos un análisis de contenido de las respuestas dadas por los profesores al ítem 1.b. En la Tabla 2, presentamos una categorización general de los argumentos que se han evidenciado y en la sección siguiente ejemplificaremos algunas respuestas que hemos seleccionado. El criterio de selección de las respuestas presentadas se basa, por un lado en la categorización de la Tabla 2, considerando los casos típicos que se asocian a dichas categorías y, por otro lado, presentamos algunos casos que consideramos que llevan implícitas distintas creencias asociadas a modelos inadecuados o que no tienen demasiada explicación.

Tabla 2. Categorización de los argumentos que pueden surgir en la resolución de la Parte 1

Categoría	Descripción	Sub-categoría	Descripción
A1. Argumentos que utilizan la frecuencia de caras	Se observa una visión frecuencial de la probabilidad, esperando que la frecuencia relativa de caras se aproxime a la probabilidad teórica. También se usa la idea de Convergencia a través de un proceso de Inferencia Informal pues se usa un modelo para rechazar o no la hipótesis de aleatoriedad de cada secuencia.	A1.1. Frecuencias muy alejadas	Argumentos que indican que las frecuencias observadas de alguna de las chicas están muy alejadas de las frecuencias que esperarían considerando un modelo binomial (75 caras y 75 cruces)
		A1.2. Frecuencias muy próximas	Corresponden a aquellos argumentos que indican que las frecuencias observadas son muy próximas al valor teórico
A2. Argumentos que consideran la longitud de las rachas	En este caso se utilizan análisis informales asociados con el modelo 3 que hemos descripto antes	A2.1. Rachas largas	Cuando se observa la existencia de rachas largas y se rechaza la secuencia como aleatoria. Este razonamiento puede indicar una comprensión incorrecta de la independencia de los ensayos repetidos.
		A2.2. Rachas cortas	Si se considera que las rachas de una de las secuencias son demasiado cortas para un proceso aleatorio. Esto indicaría una buena percepción de la independencia de ensayos.
A3. Argumentos basados en la identificación de un patrón en la secuencia	La existencia o no de un patrón en cada secuencia sirve de fundamento para indicar quien es la chica que haría trampas	A.3.1. Existencia de un patrón	La existencia de un patrón ayuda a adivinar cuál será el resultado siguiente. Algunos indican que, la alternancia de C y + se debe dar en experimentos que tienen resultados equiprobables (Luisa haría trampas). Esto puede ser un indicativo del enfoque en el resultado aislado (Konold, 1989) y muestra una comprensión deficiente del enfoque frecuencial.
		A3.2. No existe un patrón	Dado que no se puede seguir un patrón, no se puede indicar la aleatoriedad. Esto implica una concepción errónea asociado a creencias descriptivas (Goetz, 2008)

A4. Argumentos basados en la impredecibilidad de los resultados	Una característica común en diferentes concepciones de aleatoriedad es la impredecibilidad. Es decir, no poder predecir un suceso futuro basado en un resultado del pasado. La comprensión del carácter impredecible de un resultado particular en un proceso aleatorio es fundamental en la comprensión de la aleatoriedad, pero también la de la posibilidad de predicción del conjunto de resultados (variabilidad local y regularidad global). Este tipo de argumentos podría asociarse al enfoque en el resultado aislado, un sesgo consistente en interpretar un enunciado de probabilidad en forma no probabilística (Konold, 1989).		
A5. Argumentos incompletos o poco explicados	En esta categoría hemos incluido respuestas que muestran ideas incompletas de la aleatoriedad o de modelo independientemente de la elección realizada en el primer ítem	A5.1. Argumentos basados en creencias personales poco justificadas	Aparecen ideas relacionadas con la repetición del experimento y de los resultados pero de una manera confusa.
		A.5.2. Argumentos asociados a modelos diferentes a los considerados	En este caso se utiliza una extensión del modelo 2 descripto antes, pero considerando secuencias con mayor número de resultados.

Ejemplos de argumentos utilizados por los profesores

A continuación ejemplificaremos algunas de las categorías descriptas a través de las respuestas dadas por los profesores. No mostramos ejemplos de todas las categorías por problemas de extensión pero, incluimos ejemplos de las categorías más observadas y también de algunos casos atípicos o llamativos.

Categoría A.1.1.Frecuencias muy alejadas: Dentro de esta categoría encontramos la respuesta dada por la profesora 41, quien expresa lo siguiente:

> *"Si la moneda está equilibrada, la probabilidad de que salga cara o cruz es de 1/2(50%); esto significa que la diferencia entre el número de caras y el número de cruces que salieron, no debería ser muy grande. En el caso de Clara hay una diferencia de 6 mientras que, en el caso de Luisa, hay una diferencia de 14. Por lo tanto, como en este último caso, la diferencia es mayor, Luisa es la que hizo trampa"…*
>
> *Representaciones que utiliza: Clara: C = 72   + = 78   + - C = 6*
>
> *Luisa: C = 82   + = 68   + - C = 14*

En este caso, utiliza claramente el enfoque frecuencial, utilizando el modelo 1, pero partiendo de una idea intuitiva de convergencia incompleta ya que no considera la variabilidad aleatoria y por lo tanto, la lleva a tomar la decisión menos probable. Un elemento significativo que utiliza está asociado a la reflexión sobre las condiciones iniciales del experimento cuando indica: "*Si la moneda está equilibrada*".

Categoría A.1.2.Frecuencias muy próximas. En esta categoría incluimos al profesor 5 que indica:

> *"Clara hizo trampas, porque intenta seguir una regularidad de un 50% de sucesos que salga cara o cruz y de esa forma, inducir para que la medida central sea la media y que la distribución sea simétrica. Además puede suceder que salga 150 veces sólo cara o cruz"*

Este profesor pone en evidencia la idea de modelo asociado a la idea de distribución, específicamente cuando menciona características de la misma como lo son la simetría y una medida de tendencia central que, en esta ocasión asocia al parámetro de un modelo que corresponde al binomial con n=150 y p=0,5 aunque no se lo nombre específicamente. Además, brinda evidencias de utilizar un enfoque frecuencial, pero en este caso de manera adecuada ya que reconoce la variabilidad aleatoria, lo cual lo lleva a que su conclusión coincida con el resultado más probable (que Clara mienta).

Otro ejemplo de la misma categoría lo encontramos en la respuesta de la profesora 33:

> *"Clara: P(C)=72/150 = 0,48 P(+)=78/150=0,52*
>
> *Luisa: P(C)=82/150 =0,5467 P(+)=68/150=0,4533 (Ambas son probabilidades por definición de frecuencia relativa o empírica – aclaración de la profesora-)*
>
> *¿Binomial? N=150, p=0,5 P(x=72)=150C72. 0,5^72.0,5^78=.....*
>
> *Observando las probabilidades en Clara estuvo más cerca de la probabilidad a-priori o clásica y observando la distribución en general, Luisa muestra que en muchas tiradas consecutivas salió siempre o cara o cruz. Sin embargo éstos parecen argumentos más intuitivos.*
>
> *Si se tiran 5 veces y X es el n° de caras con n=5 y p=0,5: P(X=5)=0,0312 P(X=2)=0,3125 P(X=3)=0,3125*
>
> *Es menos probable que salgan secuencias consecutivas (ccccc), por ello digo que Luisa hizo trampas"*

Esta profesora utiliza inicialmente el enfoque frecuencial comparándolo con el modelo binomial pero luego utiliza la probabilidad clásica asociándolo a los cambios de C y +, utilizando una de las interpretaciones de espacio muestral que indica Chernoff (2009), lo cual la lleva a dar una respuesta incorrecta.

Categoría A.2. Considerando la longitud de las rachas. Dentro de esta categoría encontramos estos dos casos que se contraponen en su decisión por considerar distintas propiedades de los modelos. Así, la profesora 1 indica:

> *"Luisa hace trampas porque tiene las C y las + continuadas con cantidades importantes, llama la atención que sean tan seguidas teniendo en cuenta que hay 50% de cada una. Además está más alejada de 75 (mitad de 150)".*

Mientras que la profesora 2 expresa:

> *"Creo que Clara hace trampa debido a que la cantidad de caras o cruces que salen seguidos no supera los tres sucesos seguidos en ningún caso. Es decir, en los resultados de Clara hay mucha regularidad en la cantidad de datos seguidos repetidos. Oscila entre 1 y 2 mientras que el de Luisa varía entre 1 y 9".*

Como podemos observar, ambas profesoras utilizan la idea de rachas, sólo que el primero asocia su decisión a la interpretación de espacio muestral relacionada con la longitud de racha más larga, pero en esta idea no interviene la de variabilidad, lo cual lo lleva a tomar una decisión inadecuada. Mientras que la profesora 2, utiliza una interpretación del espacio muestral asociado a los cambios de C y + junto a la longitud de la racha más larga, esto le permite identificar una regularidad "forzada" y la lleva a realizar una elección adecuada.

Categoría A.3. Argumentos basados en la identificación de un patrón en la secuencia. En esta categoría incluimos respuestas como la siguiente:

> *"Para decidir que fue Luisa, me fijé en la regularidad con la que aparecen los lanzamientos. En los registros de Luisa aparecen caras muy seguidas como así también cruces. Considero que si es aleatorio el fenómeno no pueden darse cadenas de caras o cruces" (Profesora 46).*

En este caso se utiliza una concepción errónea de aleatoriedad, indicando que para que sea aleatorio debe haber alternancia de resultados. Esta respuesta está asociada con algunos de los conflictos históricos que describimos al inicio de este trabajo.

Categoría A.5. Argumentos incompletos o poco explicados. En esta categoría incluimos 6 razonamientos de los 46 profesores en los que no queda del todo claro el modelo que pretenden utilizar. Uno de estos casos es el del profesor 13:

> "*La que hizo trampas fue <u>Luisa</u> pues tirando las monedas considero que es menos probable que salga cara repetidamente cierta cantidad de veces. **Es decir la distribución de los datos no es normal**. Si bien es posible que haya salido muchas veces cara en forma seguida, hay una compensación con las cruces para que sea más 'real' la muestra. Además, que salgan las cruces seguidas es menos probable a que salgan caras y cruces seguidas".*

En este caso, parecería que se considera la distribución de la variable aleatoria "N° de caras en n lanzamientos", que se aproxima a una distribución normal con media = *n.p* y Varianza = *n.p.q*. Además presenta ideas confusas, mezclando el modelo normal con sus propias creencias descriptivas (Goetz, 2008) indicando que es casi obligatorio que si sale un resultado debe compensarse con el contrario. Aquí se muestra una concepción asociada a la *falacia del jugador*, la cual indica que un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir porque no ha ocurrido durante cierto periodo (Tversky y Kahnemann, 1982).

A MODO DE CONCLUSIÓN

Aunque hay profesores que toman decisiones adecuadas a la situación, más de la mitad presentan ideas parciales o erróneas respecto de:

- La visión de aleatoriedad como *equiprobabilidad*.
- La *visión frecuencial*, donde se espera una convergencia "rápida" entre las frecuencias esperadas y las observadas, sin considerar la variabilidad ni la independencia de los ensayos sucesivos. Así encontramos dificultades similares a los estudios de Batanero, et. al. (2012) y de Green (1983).
- El reconocimiento de la impredecibilidad de resultados aislados, sin aceptar la posibilidad de predecir la distribución de frecuencias de los sucesos implicados. En este sentido, encontramos muchas respuestas que podríamos asociar al *enfoque del resultado aislado*.
- Falta de reconocimiento de la multiplicidad de modelos subyacentes en una secuencia de resultados aleatorios.
- No reconocimiento sobre la posibilidad de que un mismo resultado pueda repetirse muchas veces, lo cual se asocia a la *falacia del jugador*.
- Ideas incompletas asociadas a los tipos de interpretaciones de espacio muestral que plantea Chernoff (2009).

Muchas de las ideas erróneas que hemos encontrado en los profesores de Matemática coinciden con las indicadas por Green (1983), quien indica que la percepción de los fenómenos aleatorios no mejora con la edad. Sus resultados indican que la mayoría de los estudiantes escoge la secuencia no aleatoria, no produciéndose cambios en la percepción de la aleatoriedad al incrementar la edad. En nuestra muestra esto se da sólo en la mitad de los sujetos, pero inicialmente nuestra conjetura era que la percepción de la aleatoriedad debería ser más adecuada debido a la formación previa de estos sujetos.

Esta actividad nos permitió debatir con los profesores, que fueron sujetos del estudio, sobre lo adecuado o no de sus argumentos, y también pudimos analizar la idea de aleatoriedad y su complejidad didáctica a la hora de pensar en una propuesta de enseñanza. Nos permitió reflexionar sobre la comprensión de las propiedades de este concepto y pensar en los posibles sesgos en los razonamientos de nuestros alumnos, además de concientizar a los propios docentes de las limitaciones o conflictos que todos tenemos en relación con la aleatoriedad y los conceptos que atraviesa la misma.

A partir del análisis de las respuestas y de la inclusión de los análisis realizados en esta experiencia a nuevos cursos de formación continua, algunos profesores han podido implementar la actividad en cursos de nivel Secundario, realizando variaciones a esta tarea en las que han utilizado distintas simulaciones que les han permitido debatir con sus propios alumnos sobre nuevas ideas que se desprenden de la misma. En estas ocasiones han realizado registro de sus clases y luego nos hemos reunido con ellos para analizar esos registros y a partir de ellos, buscar maneras de fortalecer las propuestas de tal manera de confrontar a los alumnos con sus propias ideas.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, modelización, simulación. En: *Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (pp. 119-130). Zaragoza: ICE.*

Batanero, C. (2004). Ideas Estocásticas Fundamentales. ¿Qué contenidos se deben enseñar en la clase de probabilidad? En J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola (pp. 9-30).* Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C. (2015). Understnading randomness: challenges for research and teaching. Plenary lecture. *Ninth European Congress of Research in Mathematics Education*. Prague, February, 2015.

Batanero, C., Gómez, E, Serrano, L. y Contreras, J.L. (2012). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria*. Journal of Research in Mathematics Education, 1(3), 222-245*.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Chernoff, E. (2009). *Subjective probabilities derived from the perceived randomness ofsequences ofoutcomes*. Tesis doctoral. Simon Fraser University, Canada.

Goetz, S.(2008). Fundamental ideas and basic beliefs in Stochastics. Theoretical Aspects and Empirical Impressions from the Education of Student Teachers.

Green, D. R.(1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11 -1 6 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics,* v.2, pp. 766-783. Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Gutiérrez Cabria, S. (1992) Filosofía de la Probabilidad. Valencia: Tirant lo Blanch.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6, 59-98.*

Moreno, M., Cardeñoso, J. y González, F. (2014). La aleatoriedad en profesores de biología y de matemática en formación: análisis y contraste de significados. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 11(2), 198-215.

Olesker, L. (2014). *Significados dados a la aleatoriedad y la probabilidad en el contexto de la enseñanza media.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional del Comahue, Neuquén.

Schilling, M. F.(1990). The longest run of heads. *The College Mathematics Journal, 21(3), 1 96-207.*

Székely, G. J.(1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*. Dordrecht: Reidel.

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL*. Año 8, 01, 53 – 67.

Tauber, L. (2017). Alfabetización y cultura estadística de los profesores. ¿Un logro o una necesidad? En E. Rosa (Presidencia), *3° Jornada de Educación Estadística Marta Bilotti*. Conferencia llevada a cabo en la 3ª. Jornada de Educación Estadística, Rosario, Argentina.

Tauber, L.; Cravero, M. y Redondo, Y. (2013a). Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de alfabetización estadística y de razonamiento estadístico. En: *Probabilidad Condicionada. Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, Nº 1, Vol. 1.Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Granada, España.

Tauber, L., Cravero, M. y Redondo, Y. (2013b). Generación de ideas estocásticas fundamentales a través de simulación. En: E. Rodríguez, *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo, Uruguay. Recuperado de: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/index.html

Tauber, L. y Olesker, L. (2014). Significados dados a los fenómenos aleatorios en el contexto de la enseñanza media uruguaya. En: L. Tauber (Ed.), *Actas de V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas de investigación en Educación Matemática*. Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1 982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases (pp. 11 7-1 28). New York: Cambridge University Press*.